LINEÁRNÍ FORMY

Pozn.: v dalším textu symbolem x značíme n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení lineární formy na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$:

a) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 8x_3,\ n = 3$

b) $f(x) = x_1 + 2x_2 + 8x_3,\ n = 7$

c) $f(x) = 5,\ n = 3$

d) $f(x) = 0,\ n = 33$

e) $f(x) = x_4 - x_5 + 4,\ n = 5$

f) $f(x) = (x_1, x_3),\ n = 3$

g) $f(x) = x_1x_3 + x_2,\ n = 10$

Příklad 2. Nechť V je prostor dimenze 4. Určete matici lineární formy f vzhledem k bázi N, víte-li, že analytické vyjádření této lineární formy f vzhledem k bázi N je $f(x) = x_1 + 4x_2 + 5x_4$.

Příklad 3. Nechť V je prostor dimenze 5. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi N, víte-li, že matice této lineární formy f vzhledem k bázi N je $(0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 1)$.

Příklad 4. Lineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření $f(x) = 2x_1 + x_2 - 5x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(2,\ -1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (2,\ 3,\ -2)\}\,.$$

Příklad 5.$*$[1] Lineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi $M = \{(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$ analytické vyjádření $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 6.$*$ Lineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi $M = \{(1,\ 1),\ (1,\ -1)\}$ analytické vyjádření $f(x) = x_1 + 2x_2$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(1,\ -2),\ (3,\ 2)\}$.

---

[1] Příklady označené hvězdičkou $*$, tj. příklady 5, 6 a 7, jsou převzaty ze sbírky úloh Bečvář, J.: *Vektorové prostory III.*, SPN, Praha, 1982.

Příklad 7.$*$ Lineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ má vzhledem k bázi $M = \{(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0)\}$ analytické vyjádření $f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi $N = \{(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 1),\ (4,\ 1,\ 1)\}$.

Příklad 8. K bázi $M = \{(2,\ 1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 0,\ 2)\}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ najděte duální bázi M^*.

Příklad 9. K bázi $M = \{(2,\ 1,\ 0,\ 0),\ (2,\ 1,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 2,\ 0)\}$ prostoru $\mathbb{Z}_3^4$ najděte duální bázi M^*.

Příklad 10. K bázi $M = \{(0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ najděte duální bázi M^*.

Příklad 11. Najděte duální bázi M k bázi $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, jestliže formy f_i jsou dány svým analytickým vyjádřením $f_1(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $f_2(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $f_3(x) = 3x_1 + x_2 + 3x_3$ vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 12. Nechť je dána báze $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\}$ duální k bázi M prostoru $\mathbb{R}^4$. Analytická vyjádření forem $f_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_2 + x_4, \quad f_2(x) = x_1 + x_3, \quad f_3(x) = x_1 + x_2 + x_3, \quad f_4(x) = x_3 - x_4.$$

Určete souřadnice vektoru $v = (0,\ 0,\ 5,\ 2)$ vzhledem k bázi M.

Příklad 13. Nechť je dána báze $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ duální k bázi M prostoru $\mathbb{Z}_3^3$. Analytická vyjádření forem $f_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad f_2(x) = x_3, \quad f_3(x) = 2x_1 + x_2.$$

Určete souřadnice vektoru $w = (0,\ 0,\ 1)$ vzhledem k bázi M.

Příklad 14. Nechť je dána báze $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6,\ f_7,\ f_8,\ f_9,\ f_{10}\}$ duální k bázi M prostoru $\mathbb{R}^{10}$. Analytická vyjádření forem $f_i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ 10$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = x_{10},\ f_2(x) = x_9,\ f_3(x) = x_8,\ f_4(x) = x_7,\ f_5(x) = x_6,$$
$$f_6(x) = x_5,\ f_7(x) = x_4,\ f_8(x) = x_3,\ f_9(x) = x_2,\ f_{10}(x) = x_1.$$

Určete souřadnice vektoru $v = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10)$ vzhledem k bázi M.

Příklad 15. Nechť je dána báze $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ duální k bázi M prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. Analytická vyjádření forem $f_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, vzhledem ke kanonické bázi jsou

$$f_1(x) = 3x_1 + 3x_3, \quad f_2(x) = 2x_2, \quad f_3(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3.$$

Určete souřadnice vektoru $w = (3,\ 3,\ 4)$ vzhledem k bázi M.

Příklad 16. Nechť je dána báze $M = \{(0,\ 0,\ 1),\ (\frac{1}{2},\ 0,\ 1),\ (0,\ \frac{1}{4},\ 0)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Lineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem k duální bázi M^* k bázi M souřadnice $(2,\ -2,\ 3)$. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi

$$N = \left\{ \left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ 0\right),\ \left(0,\ \frac{1}{4},\ 1\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 2\right) \right\}.$$

Příklad 17. Nechť je dána báze $M = \{(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. Lineární forma f na prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ má vzhledem k duální bázi M^* k bázi M souřadnice $(4,\ 2,\ 0)$. Určete analytické vyjádření formy f vzhledem k bázi

$$N = \{(3,\ 2,\ 1),\ (4,\ 4,\ 4),\ (1,\ 4,\ 3)\}.$$

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ano, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, f) ne, g) ne

Příklad 2. $(1,\ 4,\ 0,\ 5)$

Příklad 3. $f(x) = 5x_2 + x_5$

Příklad 4. $f(x) = -2x'_1 + 3x'_2 + 17x'_3$

Příklad 5. $f(x) = 3x'_2 + 2x'_3$

Příklad 6. $f(x) = \frac{5}{2}x'_1 + \frac{7}{2}x'_2$

Příklad 7. $f(x) = 3x'_2 + 3x'_3$

Příklad 8. $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\}$, kde $f_1(x) = x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_3$, $f_3(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $f_4(x) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_4$

Příklad 9. Množina M není báze.

Příklad 10. $M^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$, kde $f_1(x) = x_2 - x_3$, $f_2(x) = x_1 - x_3$, $f_3(x) = x_3$

Příklad 11. $M = \{(2,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 0),\ (4,\ 2,\ 4)\}$

Příklad 12. $\langle v \rangle_M = (2,\ 5,\ 5,\ 3)$

Příklad 13. $\langle w \rangle_M = (2,\ 1,\ 0)$

Příklad 14. $\langle w \rangle_M = (10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$

Příklad 15. $\langle w \rangle_M = (1,\ 1,\ 1)$

Příklad 16. $f(x) = 2x'_1 + 5x'_2 + 8x'_3$

Příklad 17. $f(x) = x'_2$

© Martina Škorpilová