BILINEÁRNÍ FORMY

Pozn.: v dalším textu symbolem x, resp. y značíme n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, resp. n-tici $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Příklad 1. Určete, zda jsou následující zobrazení bilineární formy na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$:

a) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2 - 2x_3y_2,\ n = 3$

b) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_7 + 4x_6y_1,\ n = 7$

c) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_7 + 4x_6y_1 + 5,\ n = 10$

d) $f(x, y) = 0,\ n = 7$

e) $f(x, y) = x_4^2 + 3x_4y_3,\ n = 4$

f) $f(x, y) = (x_1, x_2,\ x_3),\ n = 3$

g) $f(x, y) = x_1x_3x_5 + y_2y_3y_4,\ n = 5$

Příklad 2. Nechť V je vektorový prostor $\mathbb{R}^3$, nechť f je bilineární forma na V a $M = \{(2, 0, 1),\ (0, 2, 1),\ (0, 0, 2),\}$ báze prostoru V. Určete matici bilineární formy f vzhledem k bázi M, víte-li, že
$f((2, 0, 1),\ (2, 0, 1)) = 1,\ f((2, 0, 1),\ (0, 2, 1)) = 7,\ f((2, 0, 1), (0, 0, 2)) = 3,$
$f((0, 2, 1),\ (2, 0, 1)) = 0,\ f((0, 2, 1),\ (0, 2, 1)) = -1,\ f((0, 2, 1), (0, 0, 2)) = 9,$
$f((0, 0, 2),\ (2, 0, 1)) = -3,\ f((0, 0, 2),\ (0, 2, 1)) = 5,\ f((0, 0, 2), (0, 0, 2)) = -5.$

Příklad 3. Nechť V je vektorový prostor $\mathbb{R}^4$. Určete matici bilineární formy f vzhledem k bázi N, víte-li, že analytické vyjádření této bilineární formy f vzhledem k bázi N je $f(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_3 + 2x_4y_1 - 5x_4y_4$.

Příklad 4. Nechť V je vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Určete analytické vyjádření bilineární formy f vzhledem k bázi L, víte-li, že matice této bilineární formy f vzhledem k bázi L je

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření $f(x,\, y) = x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$N = \{(0,\, 1,\, -3),\ (2,\, 0,\, 1),\ (0,\, 0,\, -8)\}\,.$$

Příklad 6. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření $f(x,\, y) = 3x_1y_1+2x_1y_2+2x_1y_3+2x_2y_1+4x_2y_3+x_3y_1+4x_3y_2$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\, 1,\, 1),\ (4,\, 4,\, 3),\ (4,\, 1,\, 3)\}\,.$$

Příklad 7. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření $f(x,\, y) = x_1y_2 - 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_3y_1 + 4x_3y_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$M = \{(2,\, 0,\, 0),\ (0,\, 2,\, 0),\ (0,\, 0,\, 2)\}\,.$$

Příklad 8. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi

$$M = \{(0,\, 1,\, 2),\ (0,\, 1,\, 1),\ (1,\, 1,\, 1)\}$$

analytické vyjádření $f(x,\, y) = 20x_1y_3 + 10x_2y_2 + 20x_3y_1 - 10x_3y_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$$N = \{(1,\, 0,\, 1),\ (0,\, 1,\, 1),\ (1,\, 1,\, -1)\}\,.$$

Příklad 9. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_3^3$ má vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\, 0,\, 0),\ (1,\, 1,\, 1),\ (2,\, 2,\, 1)\}$$

analytické vyjádření $f(x,\, y) = 2x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem ke kanonické bázi.

Příklad 10. Určete hodnost $r(f)$ a defekt $d(f)$ bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$, má-li f vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 5x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

Příklad 11. Určete hodnost $r(f)$ a defekt $d(f)$ bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$, má-li f vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\,0,\,0),\ (1,\,1,\,1),\ (2,\,2,\,1)\}$$

analytické vyjádření

$$f(x,\,y) = 4x_1y_1 + x_1y_2 + 5x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 1x_3y_1 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

(Upozornění: analytické vyjádření formy je totožné jako u předcházejícího příkladu)

Příklad 12. Určete hodnost $r(f)$, defekt $d(f)$, levý vrchol $L(f)$ a pravý vrchol $R(f)$ bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, má-li f vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 3x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Příklad 13. Určete hodnost $r(f)$, defekt $d(f)$, levý vrchol $L(f)$ a pravý vrchol $R(f)$ bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, má-li f vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\,1,\,3),\ (6,\,2,\,2),\ (1,\,3,\,1)\}$$

analytické vyjádření

$$f(x,\,y) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - 2x_3y_1 - 4x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

Příklad 14. Určete hodnost $r(f)$, defekt $d(f)$, levý vrchol $L(f)$ a pravý vrchol $R(f)$ bilineární formy f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^3$, má-li f vzhledem k bázi

$$M = \{(1,\,2,\,3),\ (0,\,2,\,3),\ (0,\,0,\,3)\}$$

analytické vyjádření

$$f(x,\,y) = 6x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3.$$

(Souřadnice vektorů, které generují podprostory $L(f)$ a $R(f)$, napište vzhledem ke kanonické bázi.)

Příklad 15. Jsou bilineární formy z příkladu 10, resp. 11, resp. 12, resp. 13, resp. 14 singulární nebo regulární?

Příklad 16. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_2y_4 + 2x_3y_3 + 5x_3y_4 + x_4y_1 + 5x_4y_2.$$

Rozložte tuto formu f na symetrickou část $f_S(x,\, y)$ a antisymetrickou část $f_A(x,\, y)$.

Příklad 17. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_1y_4 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_3 + 3x_3y_4 + 4x_4y_1 + 3x_4y_2.$$

Rozložte tuto formu f na symetrickou část $f_S(x,\, y)$ a antisymetrickou část $f_A(x,\, y)$.

Příklad 18. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_7^5$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = 5x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_4 + 4x_5y_5.$$

Rozložte tuto formu f na symetrickou část $f_S(x,\, y)$ a antisymetrickou část $f_A(x,\, y)$.

Příklad 19. Bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ má následující normální tvar:

a) $f(x,\, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,\ n = 3$

b) $f(x,\, y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,\ n = 3$

c) $f(x,\, y) = x_1y_1 - x_2y_2,\ n = 4$

d) $f(x,\, y) = x_1y_1,\ n = 3$

e) $f(x,\, y) = -x_1y_1 - x_2y_2,\ n = 4$

f) $f(x,\, y) = x_1y_1 + x_2y_2,\ n = 4$

g) $f(x,\, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,\ n = 4$

h) $f(x,\, y) = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3,\ n = 3$

Určete signaturu formy f a typ formy f.

Příklad 20. Symetrická bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi analytické vyjádření

$$f(x,\, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_3y_1 - 2x_3y_3.$$

Najděte nějakou polární bázi P formy f a také analytické vyjádření této formy vzhledem k nalezené bázi P.

Najděte nějakou normální bázi N formy f a také analytické vyjádření této formy vzhledem k nalezené bázi N, tj. normální tvar formy f.

Určete signaturu a typ formy.

Příklad 21. Symetrická bilineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte nějakou polární bázi P formy f a také analytické vyjádření této formy vzhledem k nalezené bázi P.

Najděte nějakou normální bázi N formy f a také analytické vyjádření této formy vzhledem k nalezené bázi N, tj. normální tvar formy f.

Určete signaturu a typ formy.

VÝSLEDKY:

Příklad 1. a) ne, b) ano, c) ne, d) ano, e) ne, f) ne, g) ne

Příklad 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklad 4. $f(x,\, y) = 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1$

Příklad 5. $f(x,\,y) = 7x_1'y_1' - 10x_1'y_2' + 32x_1'y_3' - 6x_2'y_1' + 5x_2'y_2' - 24x_2'y_3' + 16x_3'y_1'$
$-24x_3'y_2' + 64x_3'y_3'$

Příklad 6. $f(x,\,y) = 3x_1'y_1' + x_1'y_2' + 3x_1'y_3' + 2x_2'y_1' + 4x_2'y_2' + 4x_2'y_3' + 4x_3'y_1' + 4x_3'y_2'$
$+4x_3'y_3'$

Příklad 7. $f(x,\,y) = 4x_1'y_2' - 12x_1'y_3' + 8x_2'y_1' + 4x_3'y_1' + 16x_3'y_3'$

Příklad 8. $f(x,\,y) = 70x_1'y_1' - 20x_1'y_2' - 70x_1'y_3' - 20x_2'y_1' + 10x_2'y_2' + 20x_2'y_3' - 70x_3'y_1'$
$+20x_3'y_2' - 50x_3'y_3'$

Příklad 9. $f(x,\,y) = 2x_1'y_2' + x_1'y_3' + x_2'y_1' + 2x_2'y_2' + 2x_3'y_1'$

Příklad 10. $r(f) = 2,\ d(f) = 1$

Příklad 11. $r(f) = 2,\ d(f) = 1$

Příklad 12. $r(f) = 1,\ d(f) = 2,$
$L(f) = [(2,\,1,\,0),\ (1,\,0,\,1)],\ R(f) = [(1,\,1,\,0),\ (1,\,0,\,1)]$

Příklad 13. $r(f) = 3,\ d(f) = 0,\ L(f) = R(f) = O$

Příklad 14. $r(f) = 1, d(f) = 2, L(f) = [(0,\,0,\,3),\ (1,\,2,\,3)], R(f) = [(2,\,6,\,2),\ (3,\,6,\,5)]$

Příklad 15. singulární; singulární; singulární; regulární; singulární

Příklad 16. $f_S(x,\,y) = 2x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + 3x_1y_4 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_2y_4 + 2x_3y_3 + \frac{5}{2}x_3y_4$
$+3x_4y_1 + 5x_4y_2 + \frac{5}{2}x_4y_3,$
$f_A(x,\,y) = -\frac{1}{2}x_1y_2 + 2x_1y_4 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{5}{2}x_3y_4 - 2x_4y_1 - \frac{5}{2}x_4y_3$

Příklad 17. $f_S(x,\,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 4x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + 4x_2y_4 + x_3y_2$
$+2x_3y_3 + 4x_3y_4 + 4x_4y_1 + 4x_4y_2 + 4x_4y_3,$
$f_A(x,\,y) = 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_2y_4 + 4x_3y_2 + 4x_3y_4 + 4x_4y_2 + x_4y_3$

Příklad 18. $f_S(x,\,y) = f(x,\,y),\ f_A(x,\,y) = 0$

Příklad 19. a) $(3,\,0,\,0)$, pozitivně definitní
b) $(1,\,2,\,0)$, indefinitní
c) $(1,\,1,\,2)$, indefinitní
d) $(1,\,0,\,2)$, pozitivně semidefinitní
e) $(0,\,2,\,2)$, negativně semidefinitní
f) $(2,\,0,\,2)$, pozitivně semidefinitní
g) $(3,\,0,\,1)$, pozitivně semidefinitní
h) $(0,\,3,\,0)$, negativně definitní

Příklad 20. např. $P = \{(1, 0, 0),\ (-2, 1, 0),\ (5, -2, 1)\}$
$f(x, y) = x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 - 7x'_3 y'_3$ (analytické vyjádření f vzhledem k P)

např. $N = \left\{(1, 0, 0),\ (-2, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{7}}(5, -2, 1)\right\}$
$f(x, y) = x''_1 y''_1 + x''_2 y''_2 - x''_3 y''_3$ (analytické vyjádření f vzhledem k N)

signatura: (2, 1, 0), indefinitní forma

Příklad 21. např. $P = \{(1, 1, 0),\ (-1, 1, 0),\ (-2, 2, 1)\}$
$f(x, y) = 2x'_1 y'_1 - 2x'_2 y'_2 + 8x'_3 y'_3$ (analytické vyjádření f vzhledem k P)

např. $N = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 2, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0),\right\}$
$f(x, y) = x''_1 y''_1 + x''_2 y''_2 - x''_3 y''_3$ (analytické vyjádření f vzhledem k N)

signatura: (2, 1, 0), indefinitní forma