ZOBRAZENÍ TĚLES

V PRAVOÚHLÉ AXONOMETRII

Martina Škorpilová

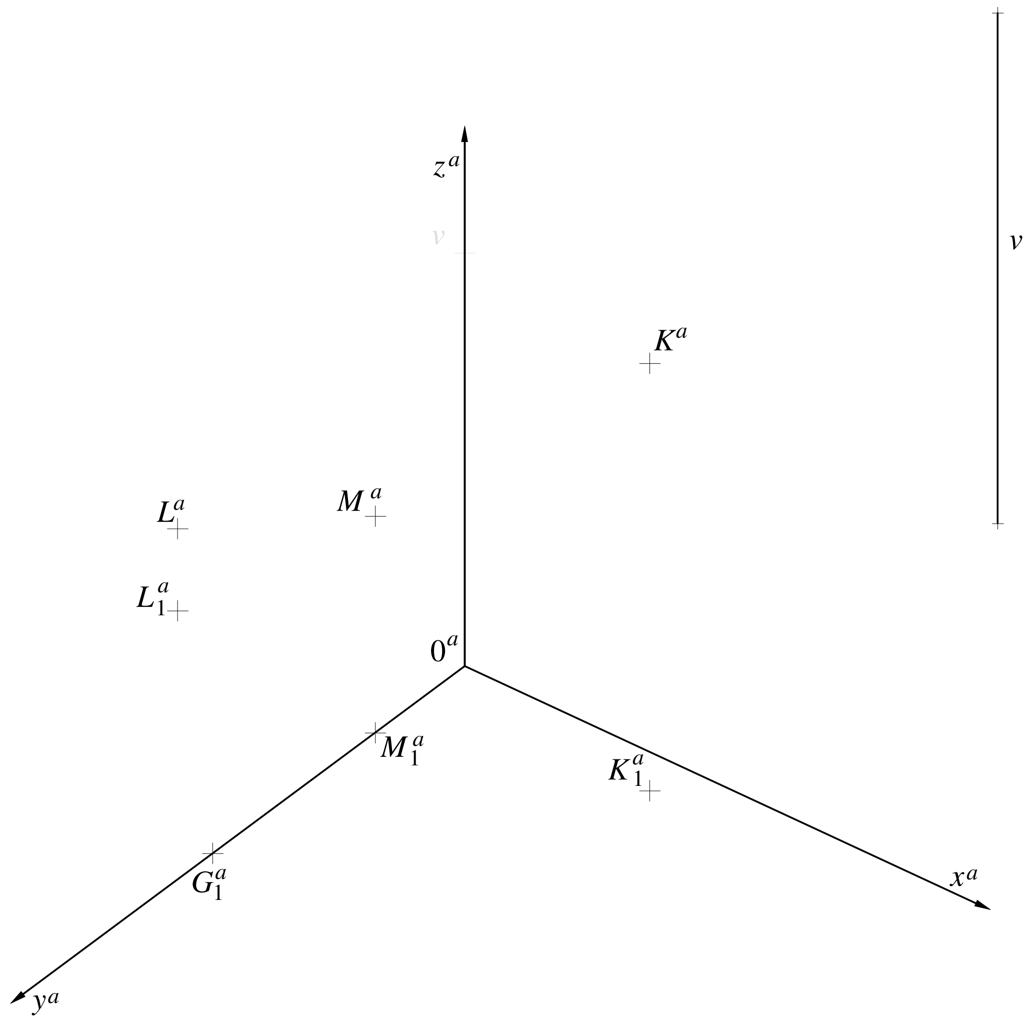
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

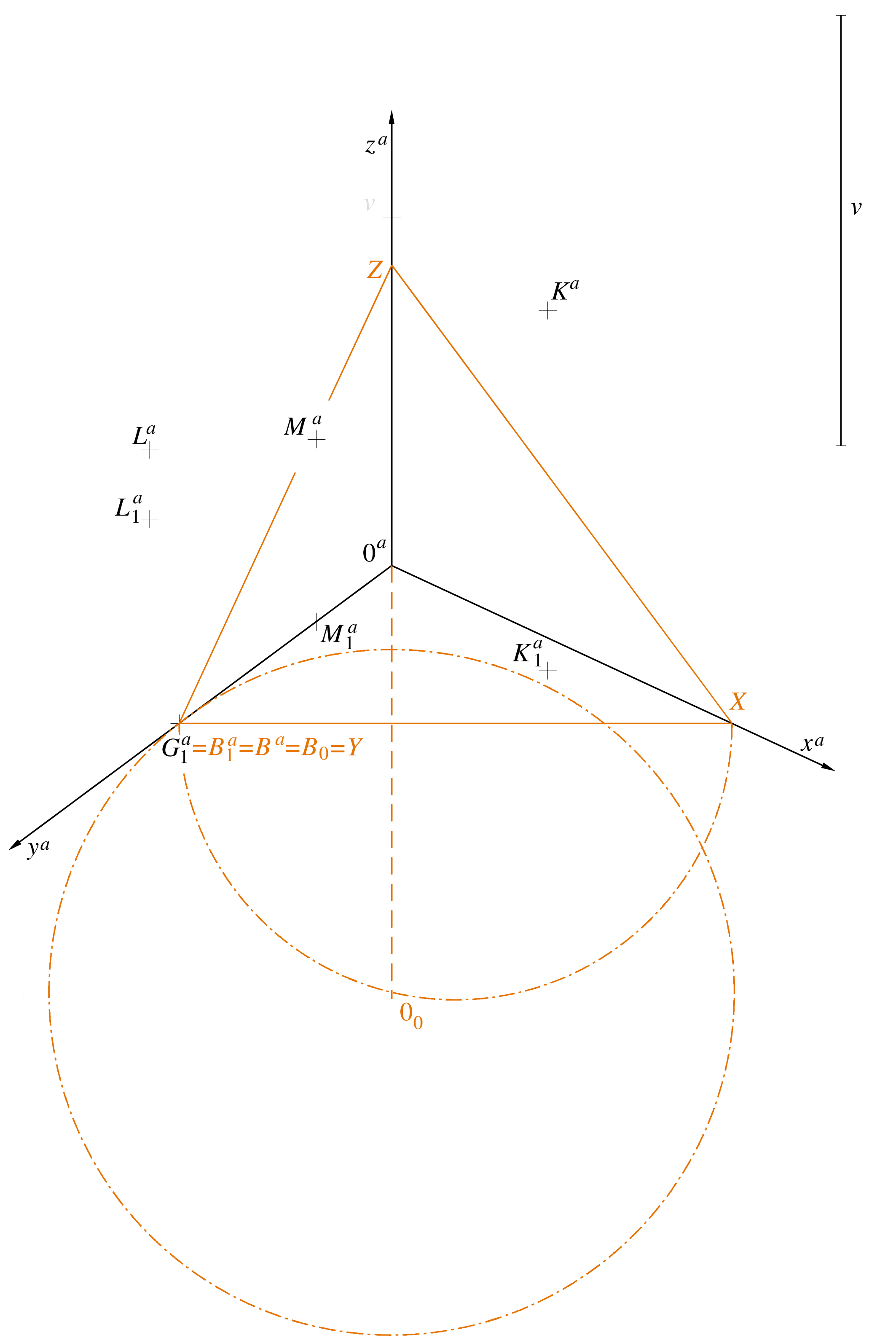
Praha

Studijní materiál nazvaný *Zobrazení těles v pravoúhlé axonometrii* je další částí souboru textů předkládajících krokovaná řešení příkladů z deskriptivní geometrie.

Text obsahuje úlohy procvičující problematiku průmětů těles v pravoúhlé axonometrii. Příklady tohoto typu se na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy řeší ve 2. (případně ve 3.) ročníku bakalářského studia v rámci *Semináře z deskriptivní geometrie II*. K jeho absolvování se předpokládá zvládnutí pravoúhlé axonometrie na úrovni předmětu *Deskriptivní geometrie II*, který studenti učitelství deskriptivní geometrie běžně absolvují v 1. ročníku. V textu, který lze využít jak ve výuce na fakultě, tak také doma při samostudiu, tedy nejsou popisovány elementární kroky konstrukcí. Uvedené slovní popisy korespondují se způsoby řešení, které je zobrazeny na příslušných obrázcích. Předpokládá se však, že studenti alespoň u některých příkladů navrhnou i jiné metody vedoucí v sestrojení hledaných průmětů.

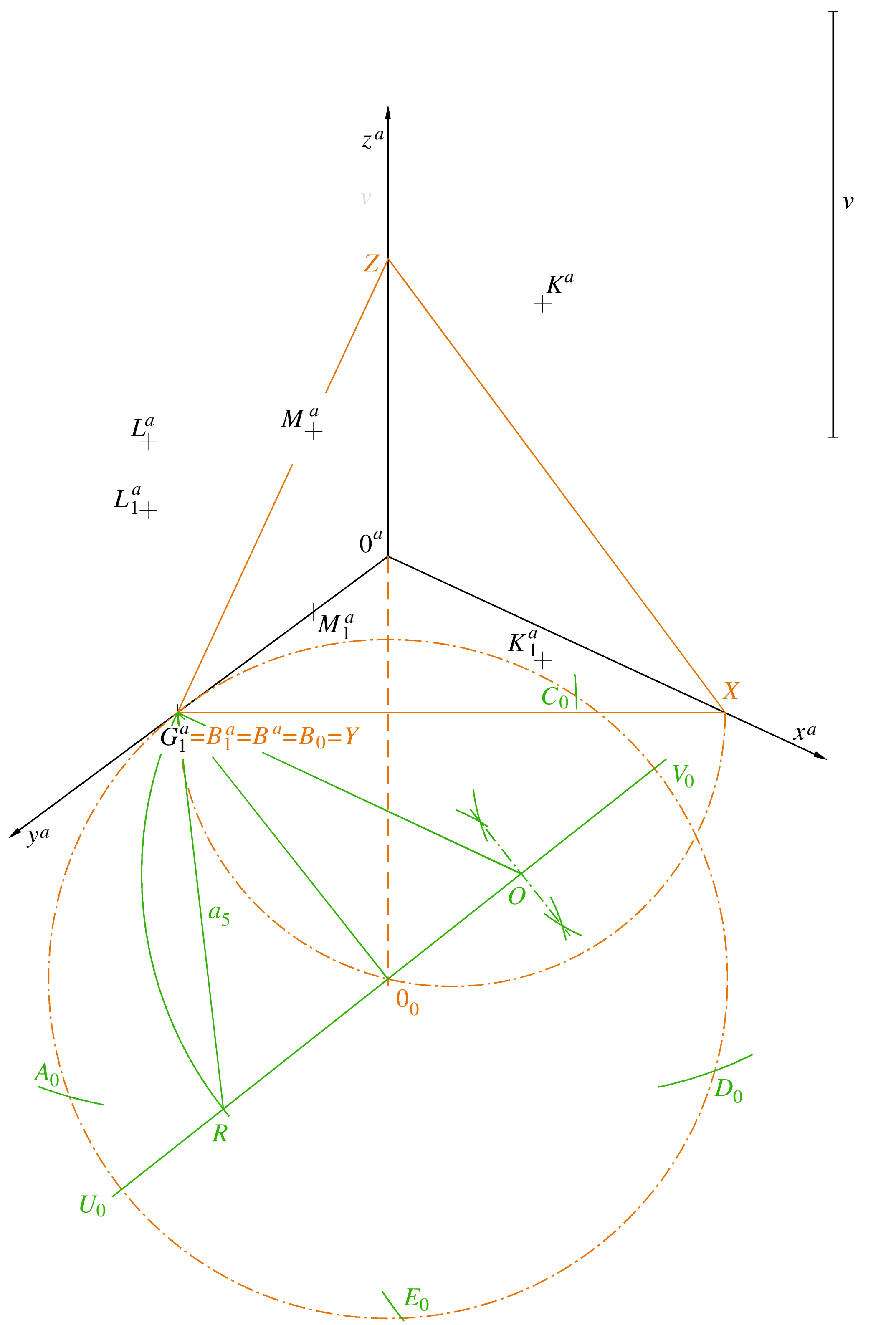
Příklad 1. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět pravidelného pětibokého hranolu $ABCDEFGHIJ$, jehož osa splývá s osou z souřadnicového systému, jehož dolní podstava $ABCDE$ leží v půdorysně a jehož výška je v. Sestrojte rovněž jeho řez rovinou $\alpha = KLM$.



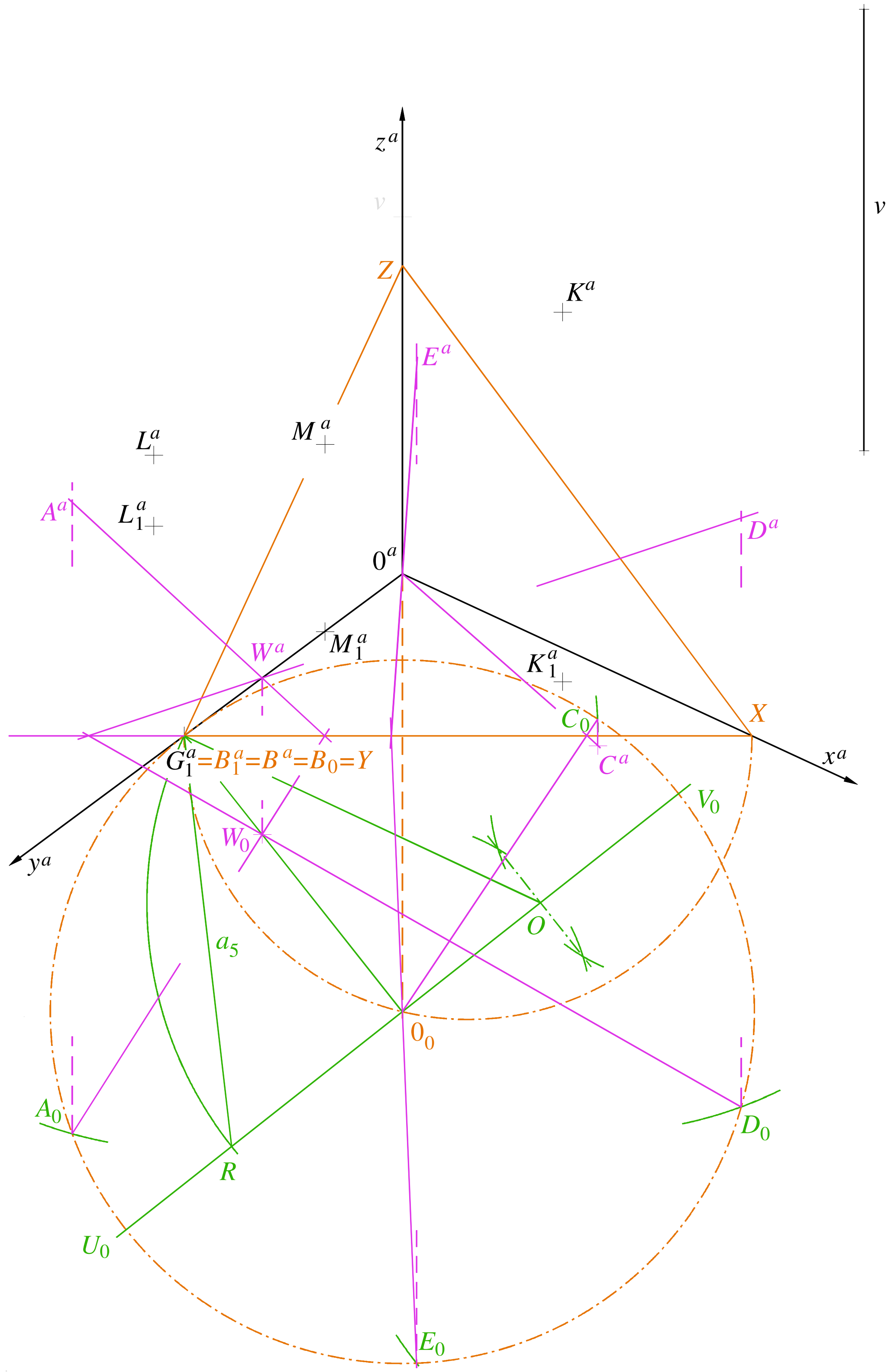


Uvědomme si, že $G_1^a = B_1^a = B^a$. Pokud zvolíme axonometrickou průmětnu tak, aby vrchol Y axonometrického trojúhelníku XYZ splýval s bodem G_1^a, leží vrchol B podstavy tělesa v axonometrické průmětně.

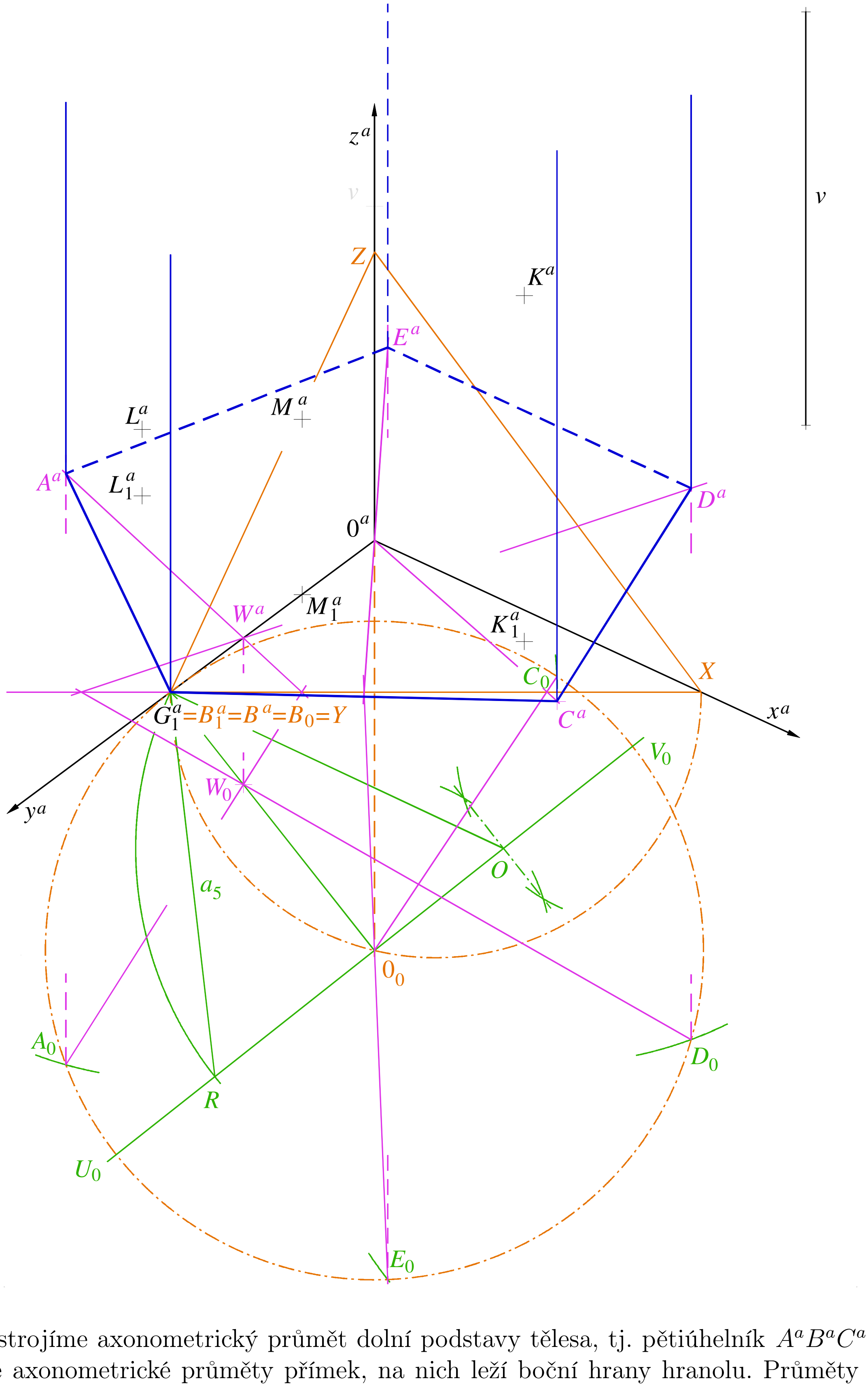
Protože podstava $ABCDE$ leží v půdorysně, otočíme tuto rovinu kolem přímky XY do axonometrické průmětny. Nejprve sestrojíme otočený počátek 0_0 a dále otočenou kružnici, která je opsaná podstavě. Otočená kružnice má střed 0_0 a poloměr $|0_0B_0|$, kde $B_0 = B_1^a$.



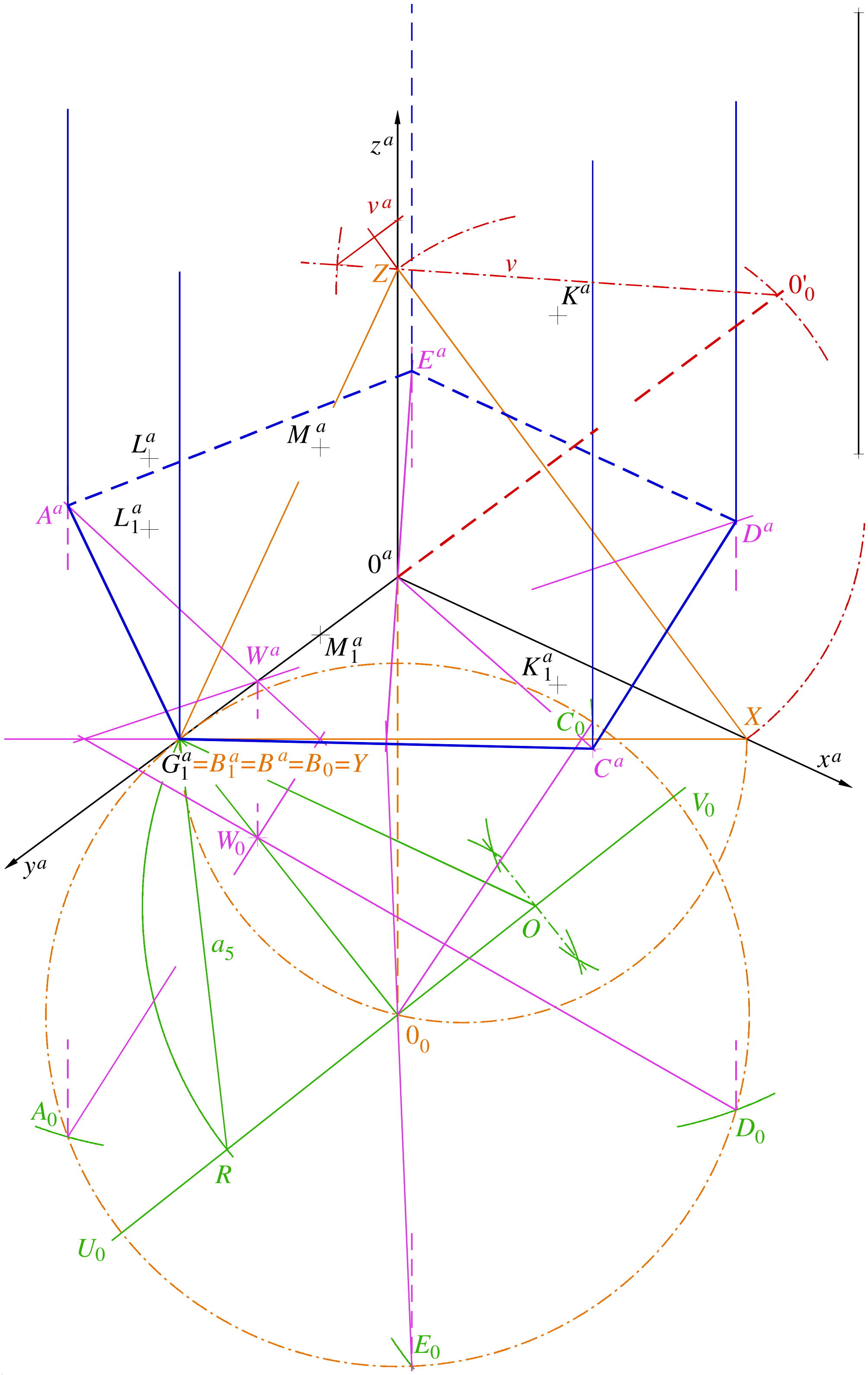
Kružnici k_0 vepíšeme pravidelný pětiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0$, známe-li jeho vrchol B_0. Připomeňme konstrukci délky jeho strany: vedeme průměr U_0V_0 kružnice k_0 kolmý na úsečku 0_0B_0. Sestrojíme střed O úsečky 0_0V_0. Hledaná délka a_5 strany pětiúhelníku je $|RB_0|$, kde bod R je průsečík průměru U_0V_0 a kružnice, která má střed O a prochází bodem B_0.



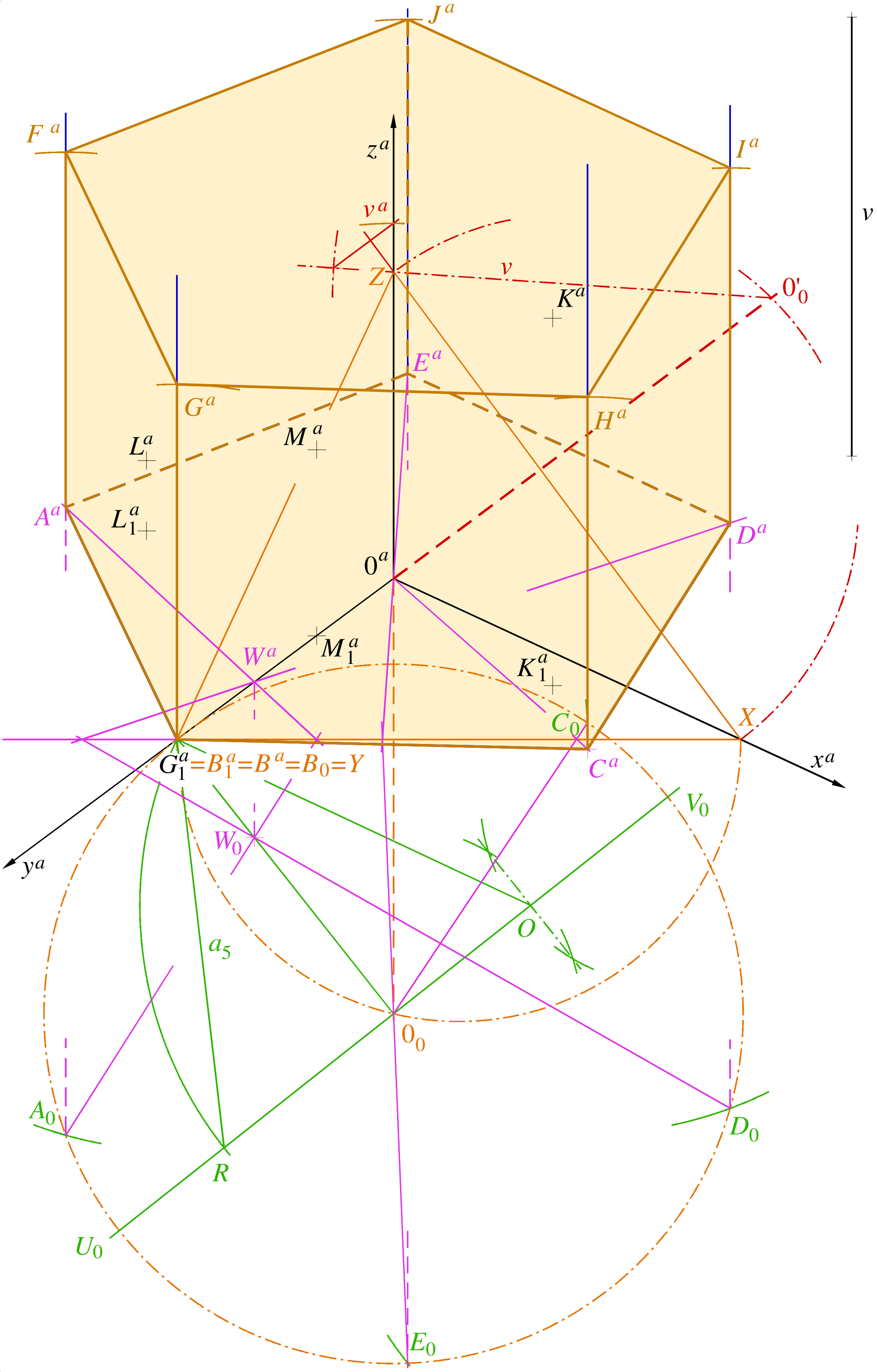
Pomocí pravoúhlé osové afinity v rovině, která je určená svou osou XY a dvojicí odpovídajících si bodů 0^a a 0_0, určíme axonometrické průměty A^a, C^a, D^a, E^a vrcholů dolní podstavy $ABCDE$. (Kvůli dostupnosti samodružných bodů některých přímek na omezené nákresně přitom můžeme využít například dvojici odpovídajících si bodů W^a a W_0, kde bod W^a zvolíme na axonometrickém průmětu y^a osy y.)



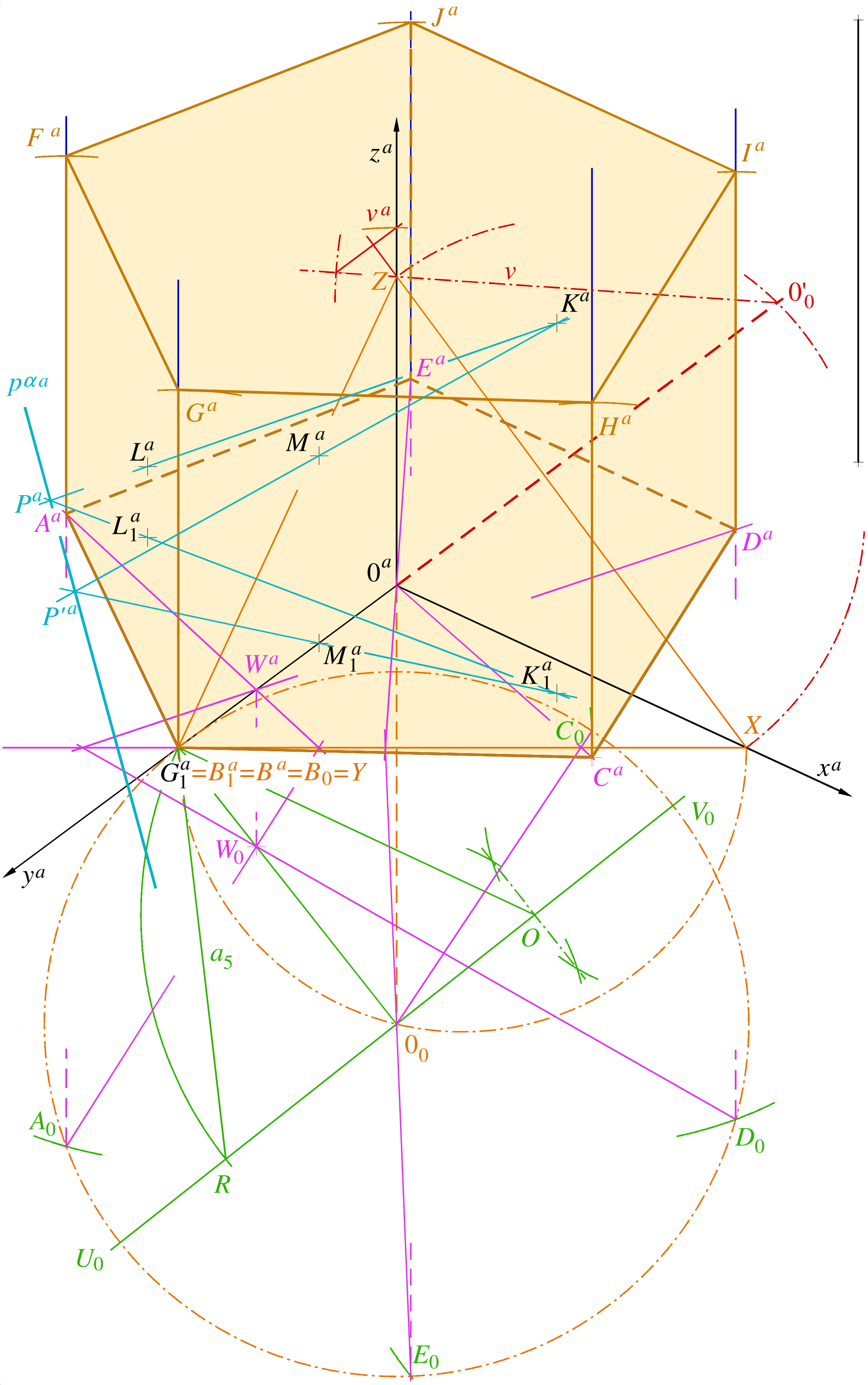
Sestrojíme axonometrický průmět dolní podstavy tělesa, tj. pětiúhelník $A^aB^aC^aD^aE^a$, a dále axonometrické průměty přímek, na nich leží boční hrany hranolu. Průměty těchto přímek jsou rovnoběžné s axonometrickým průmětem z^a osy z.



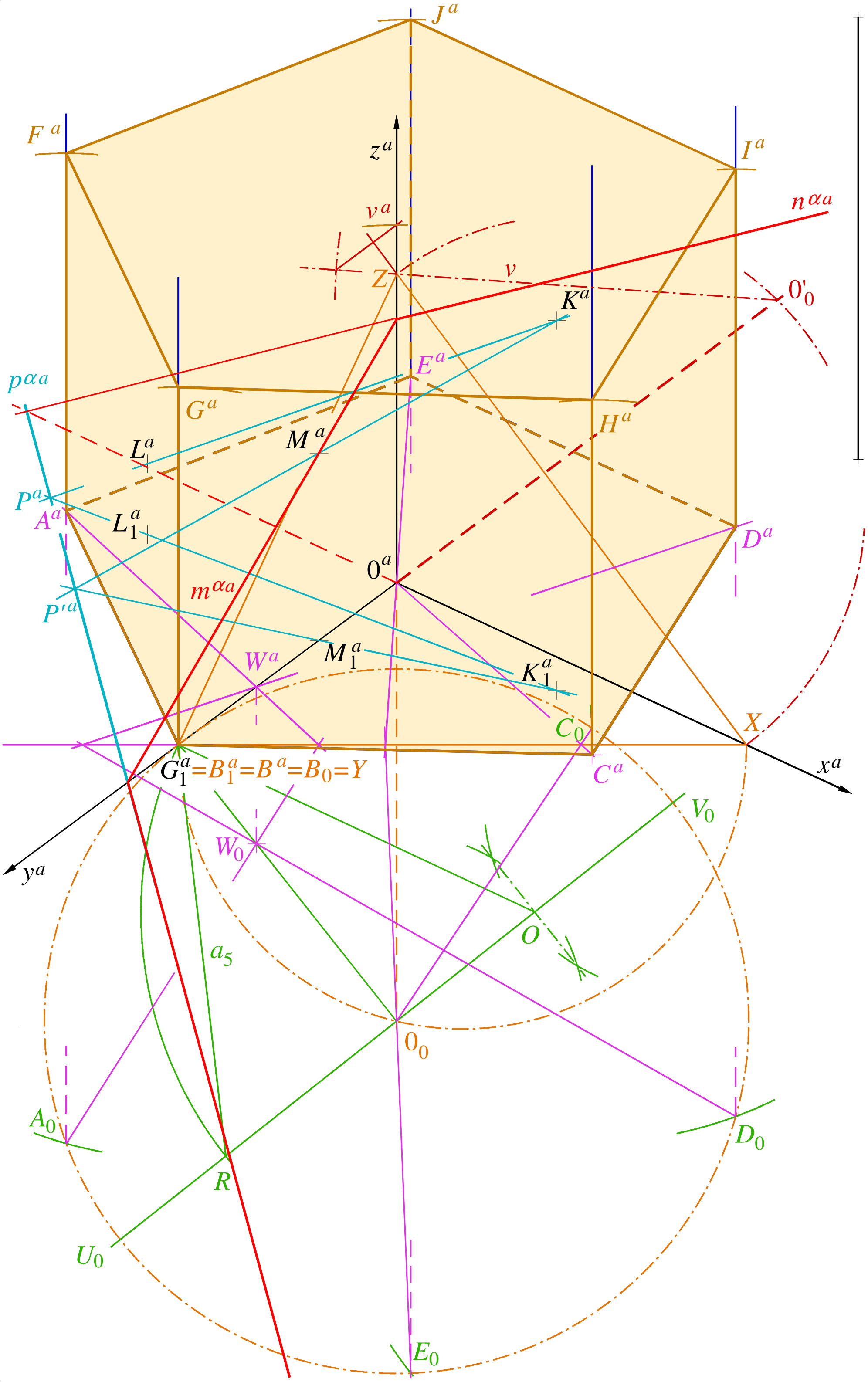
Výška v tělesa se promítáním zkreslí. Jelikož boční hrany hranolu jsou rovnoběžné s osou z, určíme zkreslenou délku pomocí otočení souřadnicové roviny, v níž leží osa z, do axonometrické průmětny. Využít tedy můžeme buď nárysnu nebo bokorysnu. Pokud otočíme nárysnu $\nu = (x, z)$, otáčíme ji kolem strany XZ axonometrického trojúhelníku XYZ. Od otočeného bodu $0'_0$ naneseme na otočenou osu z_0 skutečnou délku v a pomocí osové afinity s osou XZ a dvojicí odpovídajících si bodů 0^a, $0'_0$ určíme zkrácenou délku v^a.



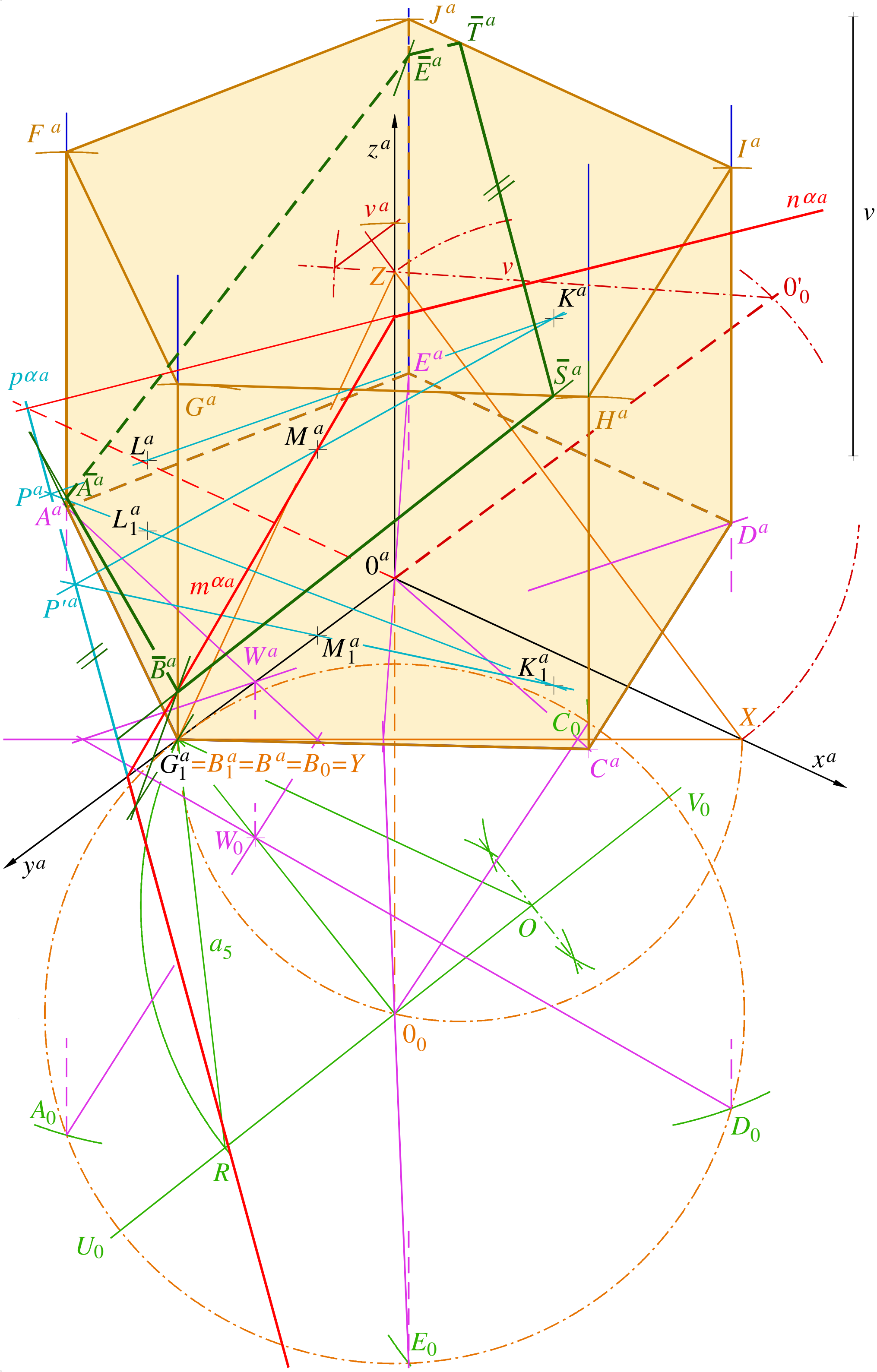
Délku v^a naneseme od průmětů vrcholů dolní podstavy na připravené rovnoběžky s axonometrickým průmětem z^a osy z, a to v kladném směru průmětu z^a. Tím získáme axonometrický průmět $F^aG^aH^aI^aJ^a$ horní podstavy tělesa, a tedy i axonometrický průmět hranolu.



Nyní nalezneme řez hranolu rovinou $\alpha = KLM$. Nejprve sestrojíme axonometrický průmět $p^{\alpha a}$ její půdorysné stopy p^α, a to například pomocí axonometrických průmětů P^a a P'^a stopníků P a P' přímek KL a KM.

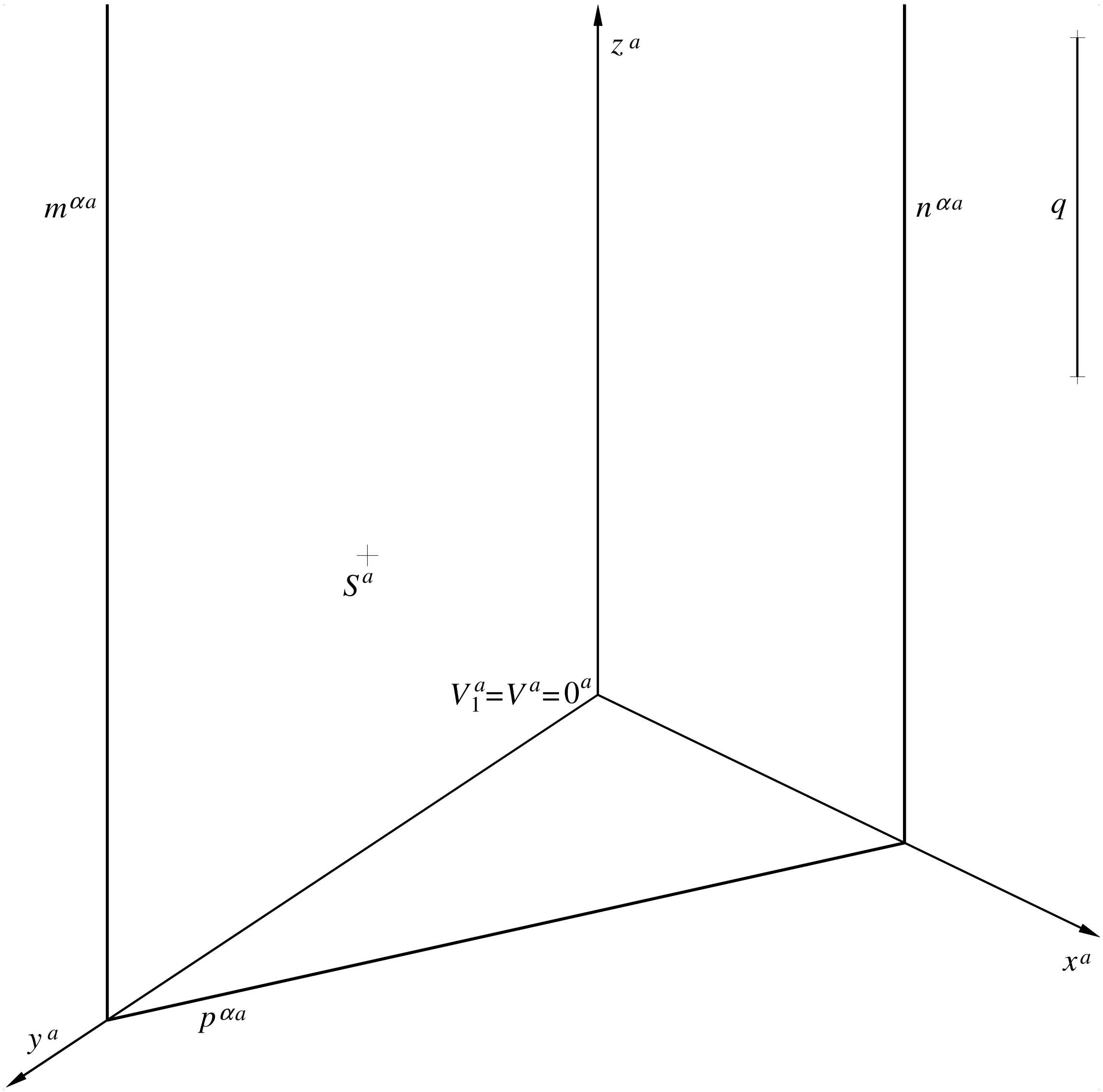


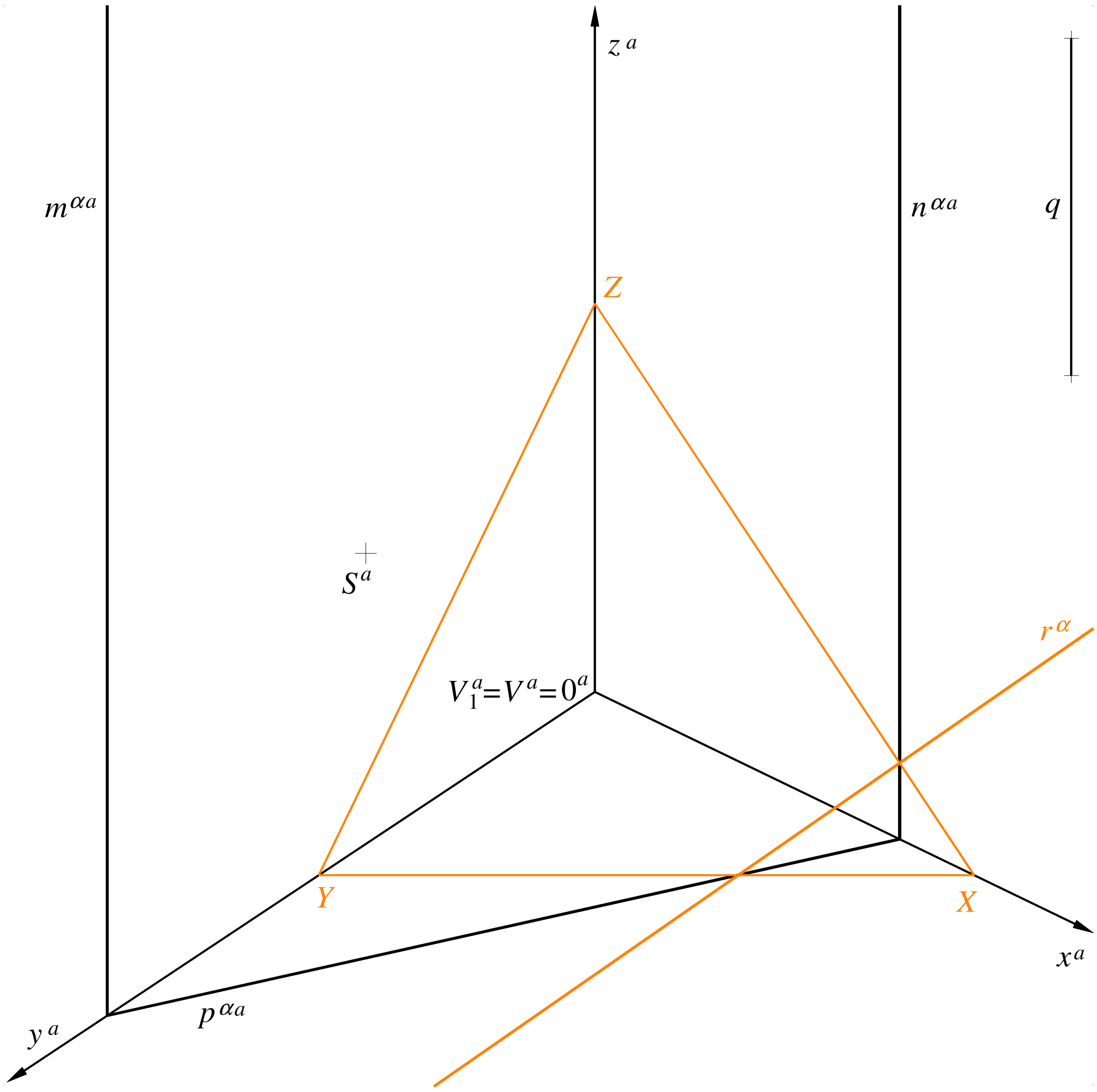
Protože axonometrický půdorys M_1^a bodu M leží na axonometrickém průmětu y^a osy y, leží bod M v bokorysně $\mu = (y, z)$. Proto axonometrický průmět $m^{\alpha a}$ bokorysné stopy m^α roviny řezu α prochází axonometrickým průmětem M^a bodu M. Nakonec sestojíme axonometrický průmět $n^{\alpha a}$ nárysné stopy n^α roviny α.



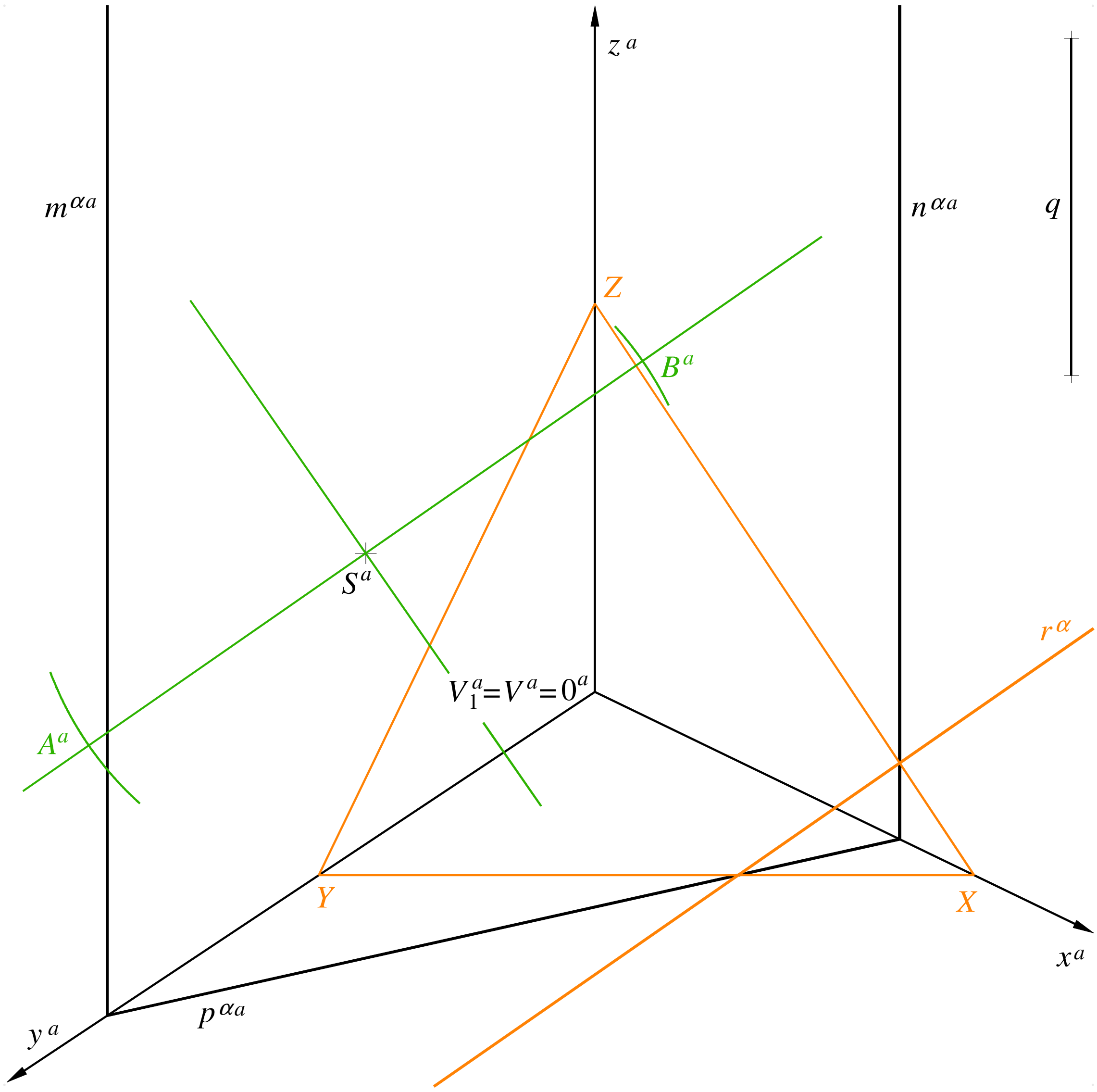
Jelikož hrana BG tělesa leží v bokorysně, je průsečík $\bar{B}$ této hrany s bokorysnou stopou m^α roviny α bodem řezu (přesněji řečeno je vrcholem n-úhelníku, který tvoří hranici řezu). Axonometrický průmět $\bar{B}^a$ bodu $\bar{B}$ je průsečík průmětů B^aG^a a $m^{\alpha a}$ uvedených útvarů. K sestrojení axonometrických průmětů $\bar{A}^a$, $\bar{S}^a$, $\bar{T}^a$, $\bar{E}^a$ zbývajících vrcholů n-úhelníku využijeme osovou afinitu v rovině, která je určená osou $p^{\alpha a}$ a dvojicí odpovídajících si bodů B^a a $\bar{B}^a$.

Příklad 2. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět kosého kužele, jehož vrchol je V a jehož podstava s hraniční kružnicí $k(S, q)$ leží v dané rovině α.

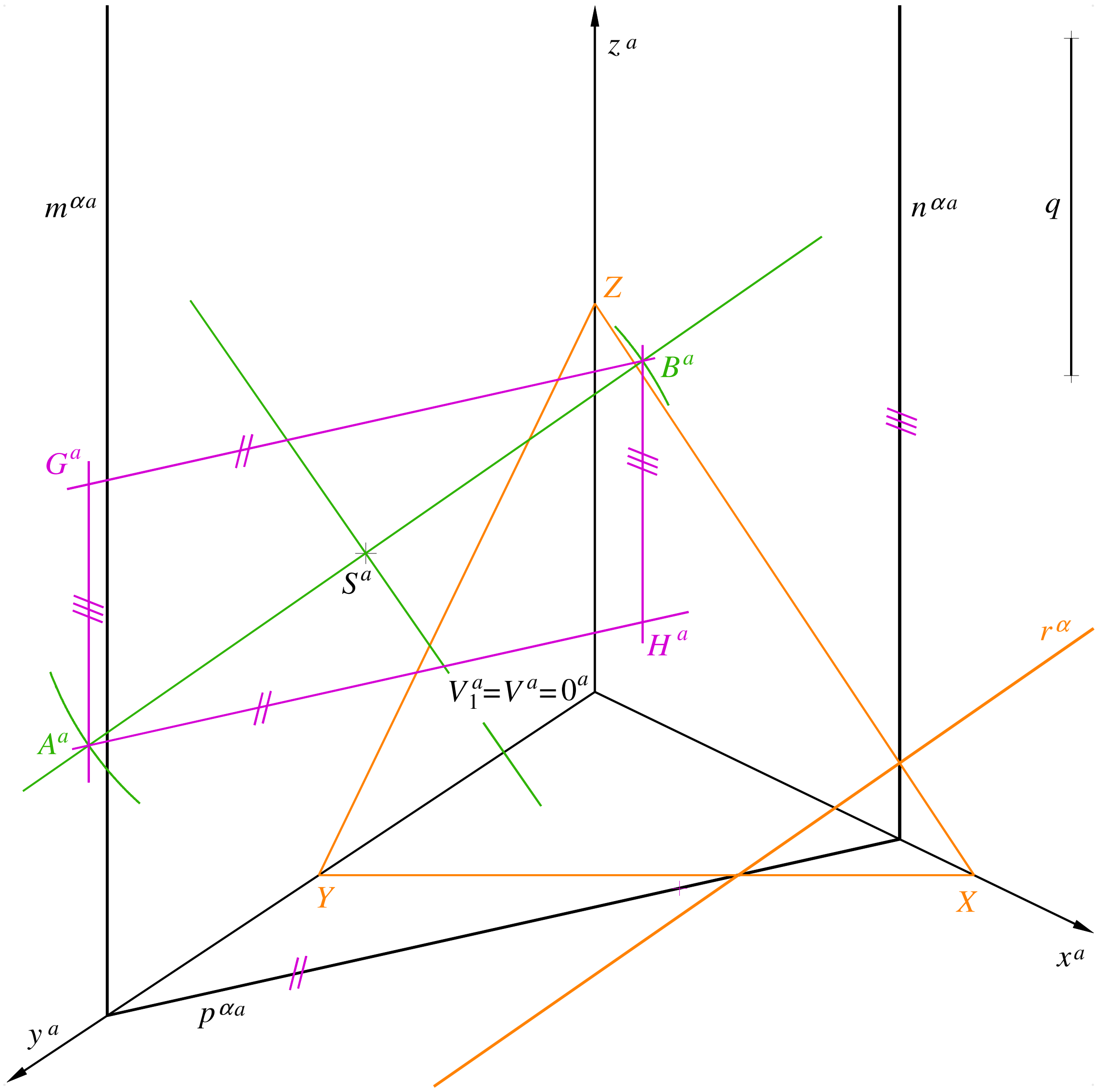




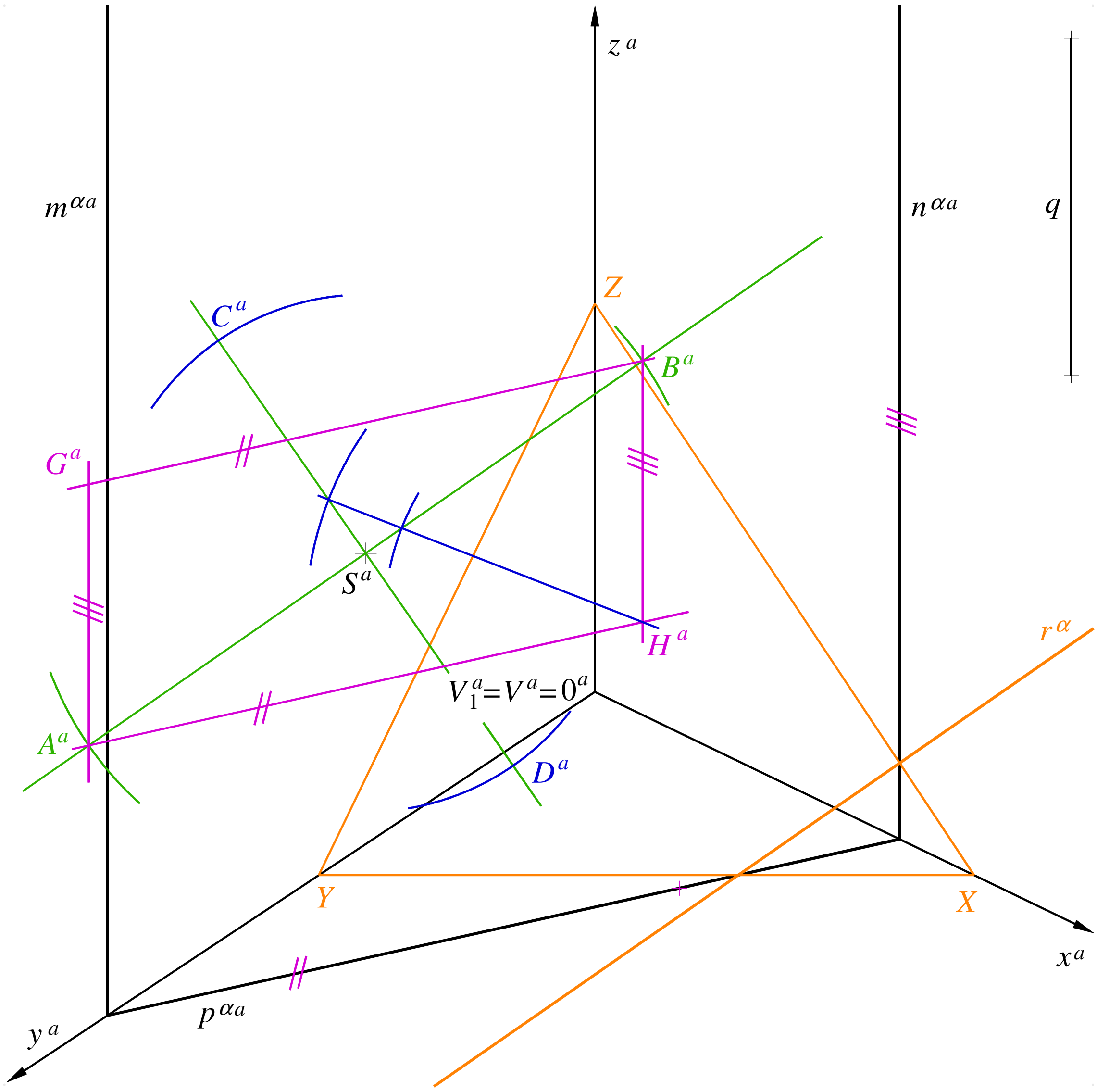
Je-li k hraniční kružnicí podstavy kužele, je zdánlivým obrysem podstavy elipsa k^a. Její hlavní osa je rovnoběžná s axonometrickou stopou roviny α. Volbou axonometrického trojúhelníku XYZ tedy určíme axonometrickou průmětnu a následně sestrojíme axonometrickou stopu $r^\alpha = r^{\alpha a}$ roviny α.



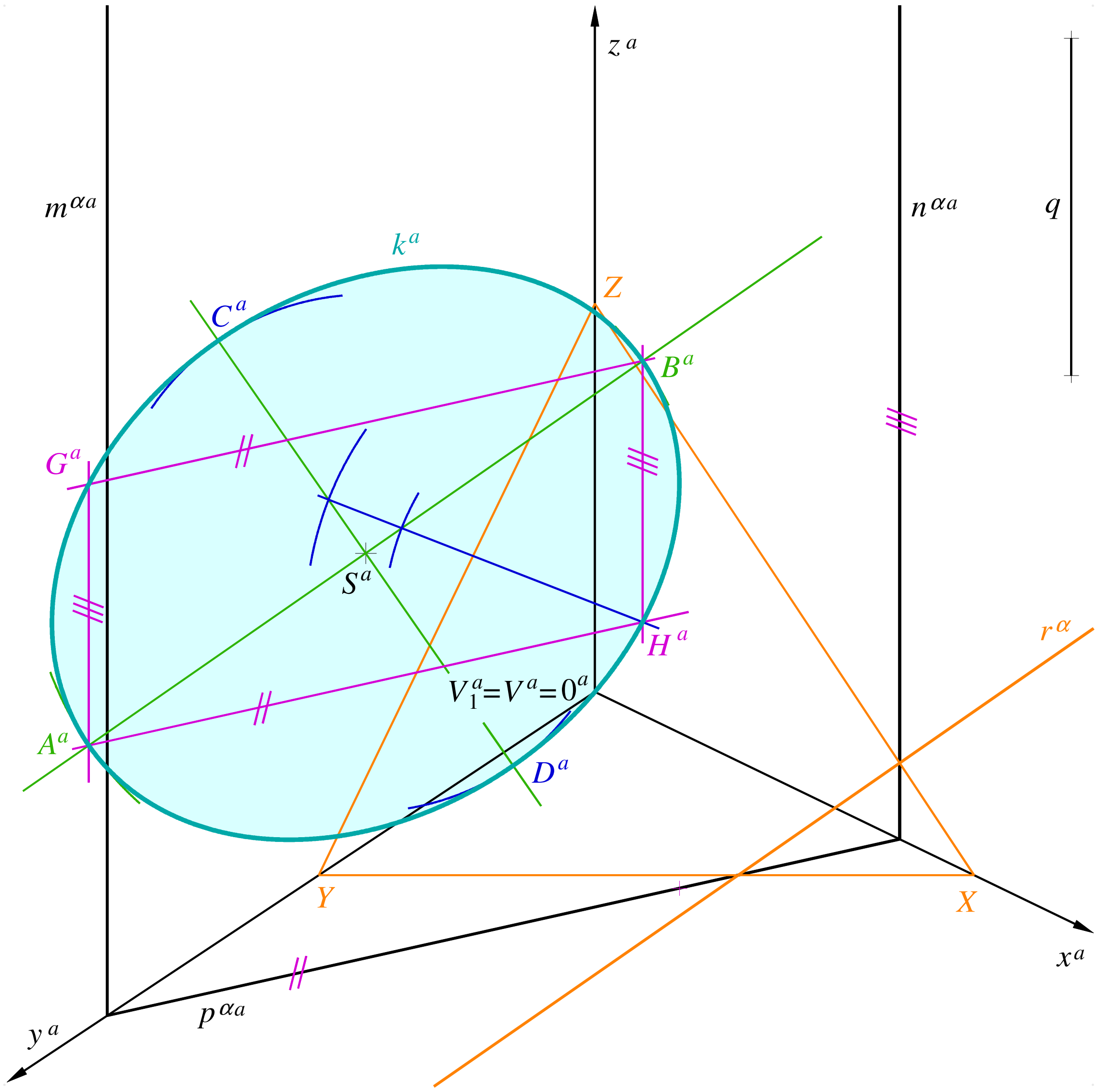
Axonometrický průmět S^a středu S kružnice k je středem elipsy k^a. Tímto bodem vedeme její hlavní osu, což je – jak již byl řečeno – rovnoběžka s axonometrickou stopou r^α roviny podstavy. Hlavní vrcholy A^a, B^a elipsy k^a leží na hlavní ose ve vzdálenosti q od středu S^a. Sestrojíme rovněž vedlejší osu elipsy.



K určení vedlejších vrcholů elipsy k^a bychom mohli využít otáčení roviny α kolem její axonometrické stopy r^α do axonometrické průmětny. Můžeme však postupovat i rychlejším způsobem. Uvědomíme si, že každá kružnice je množina všech bodů v rovině, ze kterých je průměr kružnice vidět pod pravým úhlem (s výjimkou krajních bodů průměru). Proto stačí nalézt axonometrické průměty dvojice kolmých přímek roviny α, kterými jsou například průměty $p^{\alpha a}$, $n^{\alpha a}$ půdorysné a nárysné stopy roviny α, a vést hlavními vrcholy A^a, B^a elipsy dvojici rovnoběžek s přímkami $p^{\alpha a}$, $n^{\alpha a}$. Jejich průsečík G^a je bodem elipsy k^a. (Dvojice rovnoběžek exisují dvě, analogicky lze proto získat i další průsečík H^a.)

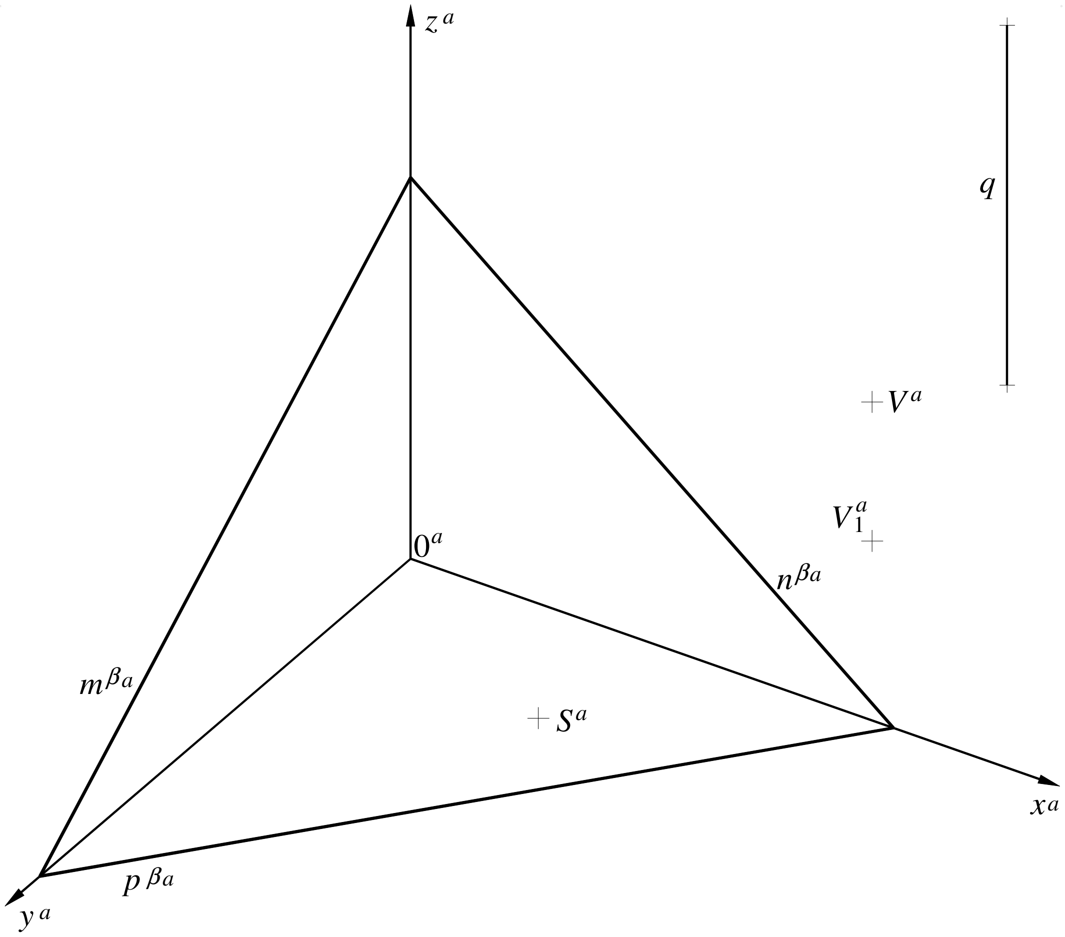


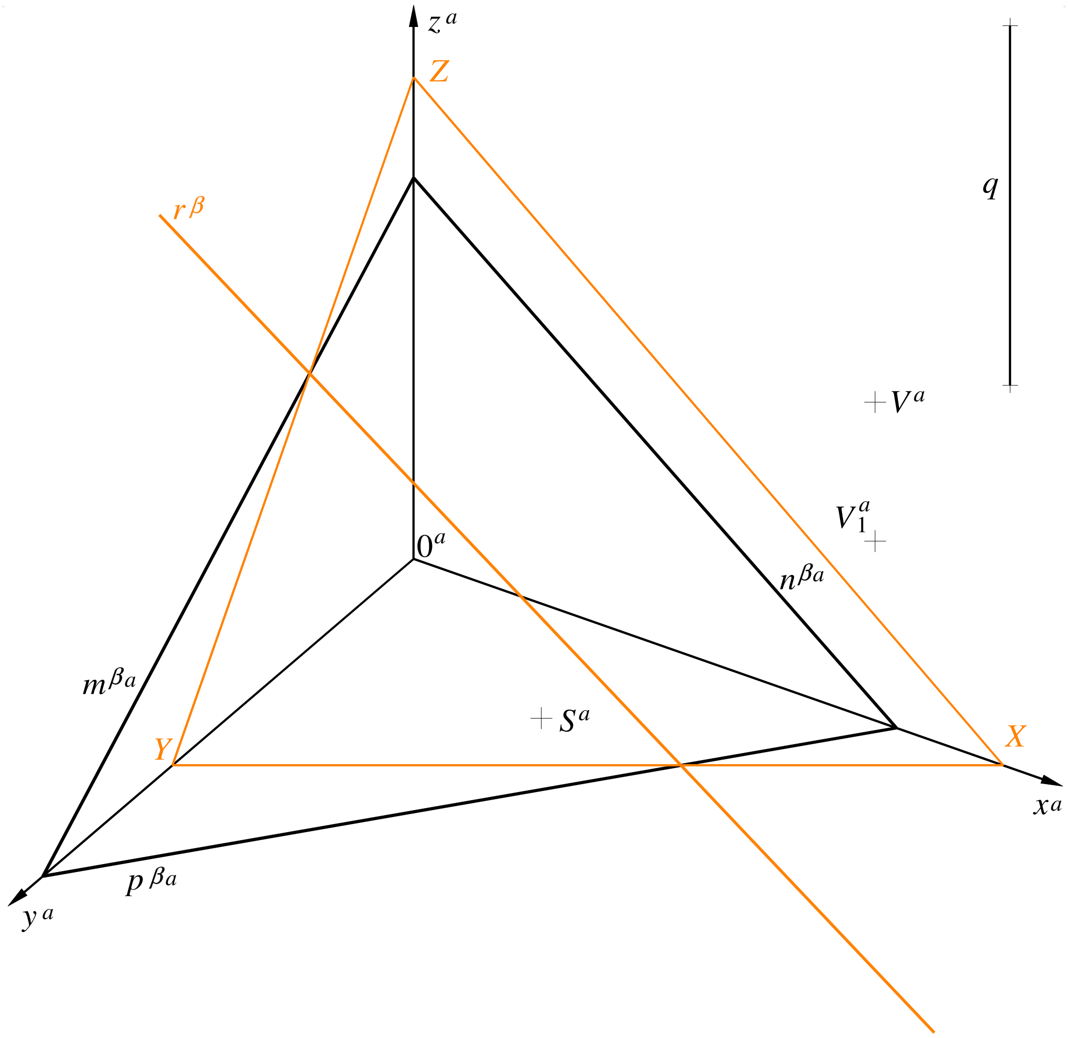
Hlavními vrcholy A^a, B^a a obecným bodem G^a je elipsa k^a jednoznačně určena. K sestrojení jejích vedlejších vrcholů C^a a D^a využijeme proužkovou rozdílovou konstrukci.



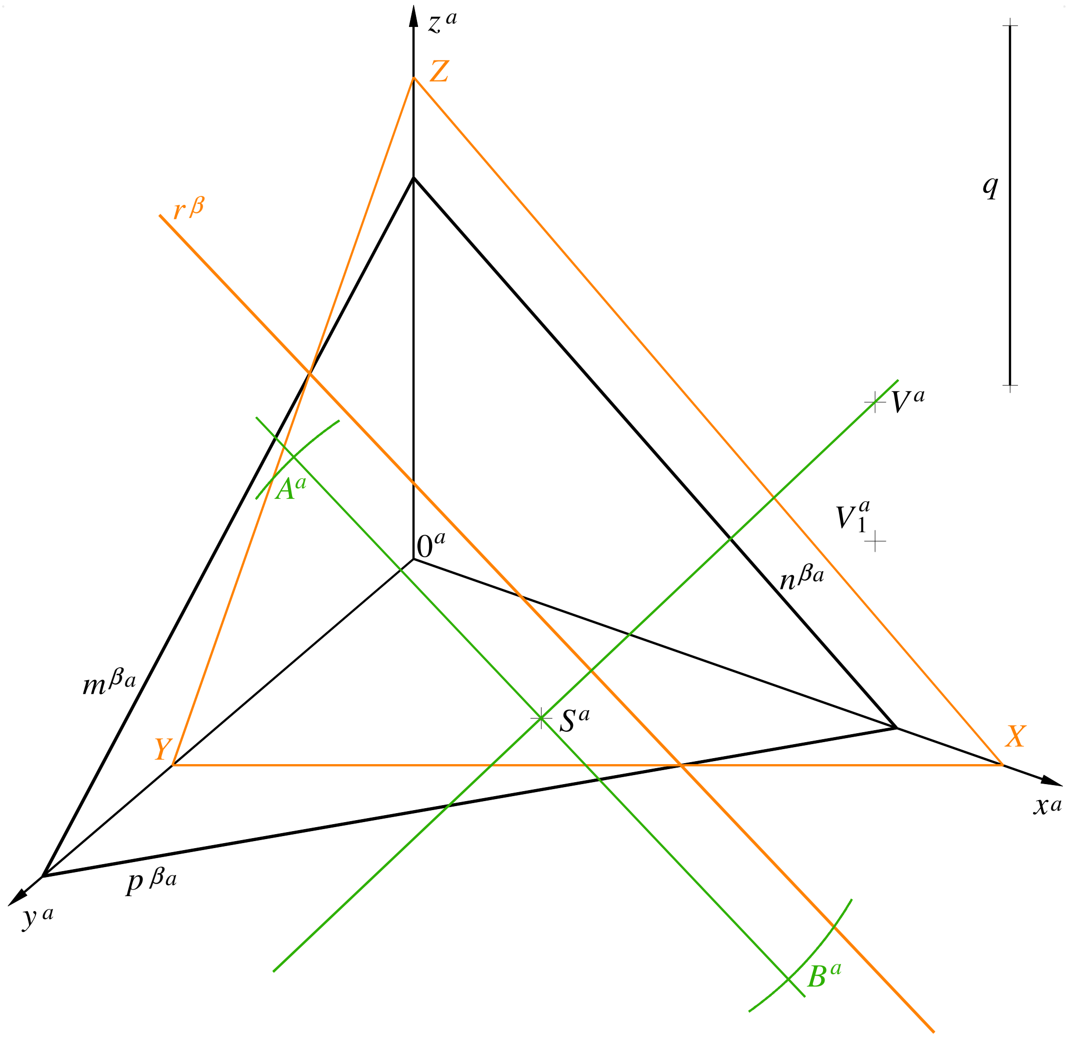
Průmětem podstavy kužele je elipsa k^a a její vnitřní část. Jelikož axonometrický průmět V^a vrcholu V leží na právě sestrojené elipse k^a, splývá axonometrický průmět kužele s průmětem podstavy, tj. axonometrickým průmětem tělesa je rovněž elipsa k^a a její vnitřní část.

Příklad 3. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět kosého kužele, jehož podstavou je kruh s hraniční kružnicí $k(S, q)$ ležící v dané rovině β. Vrcholem kužele je bod V.

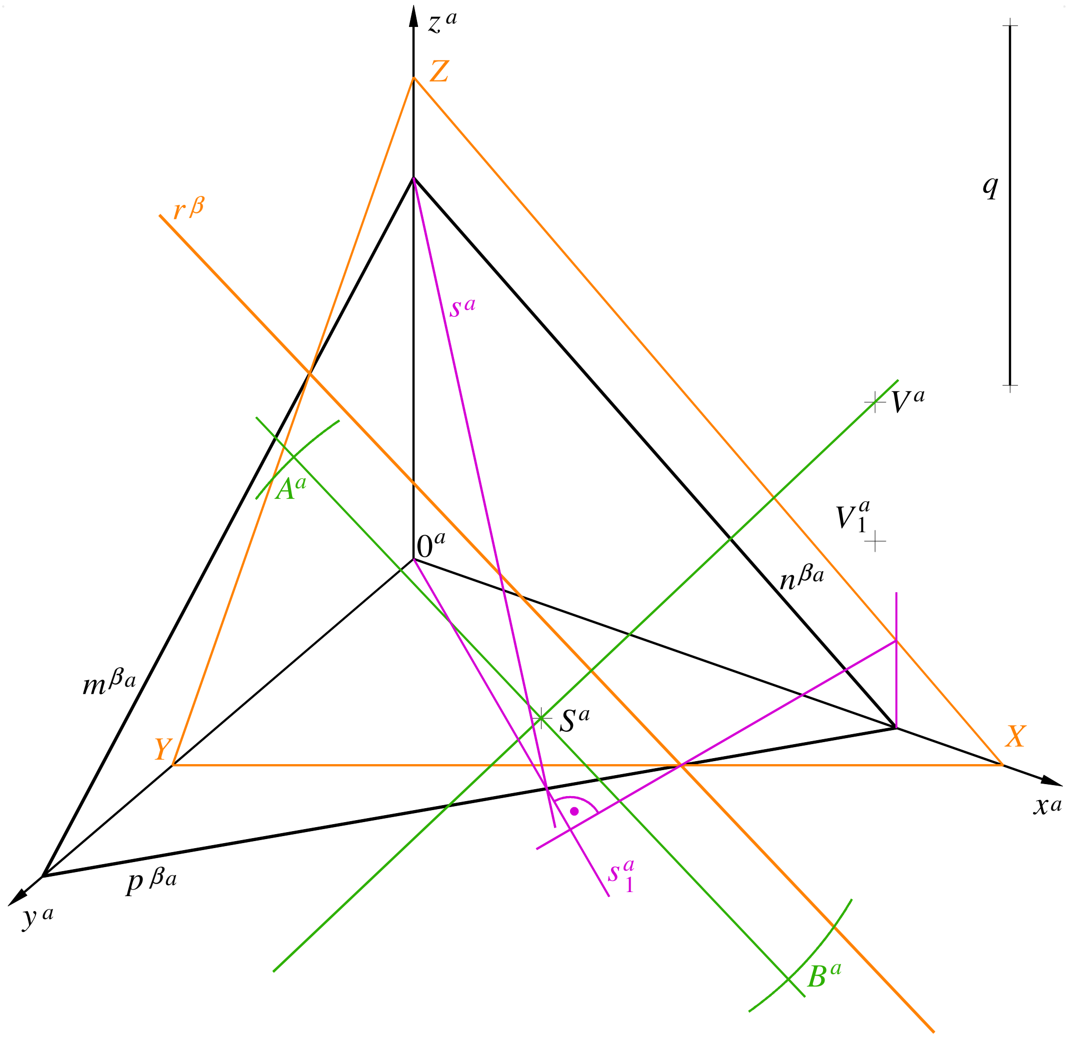




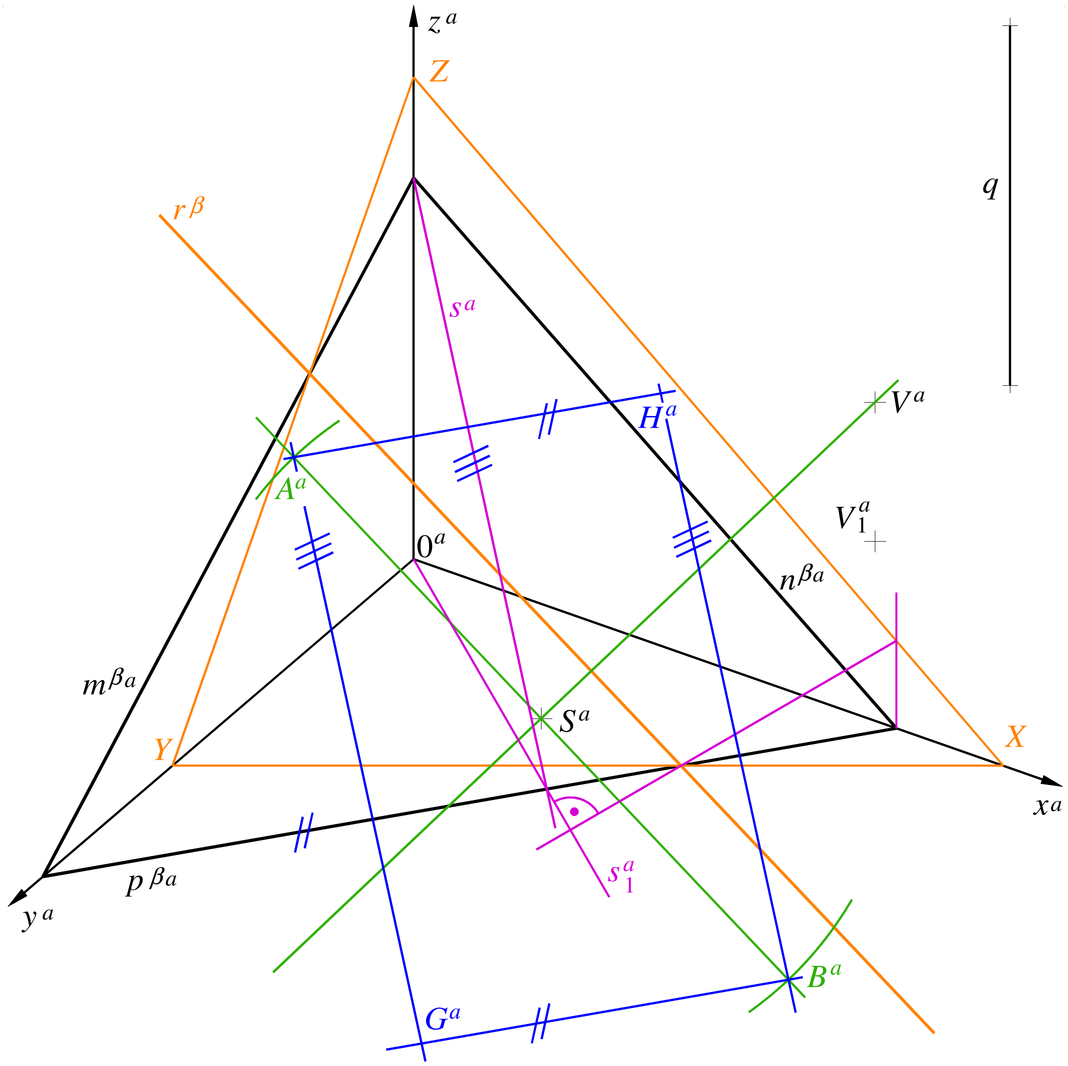
Hlavní osa elipsy k^a, která je zdánlivým obrysem podstavy kužele, je rovnoběžka s axonometrickou stopou roviny β. Pomocí axonometrického trojúhelníku XYZ proto zvolíme axonometrickou průmětnu a poté sestrojíme axonometrickou stopu $r^\beta = r^{\beta a}$ roviny β.



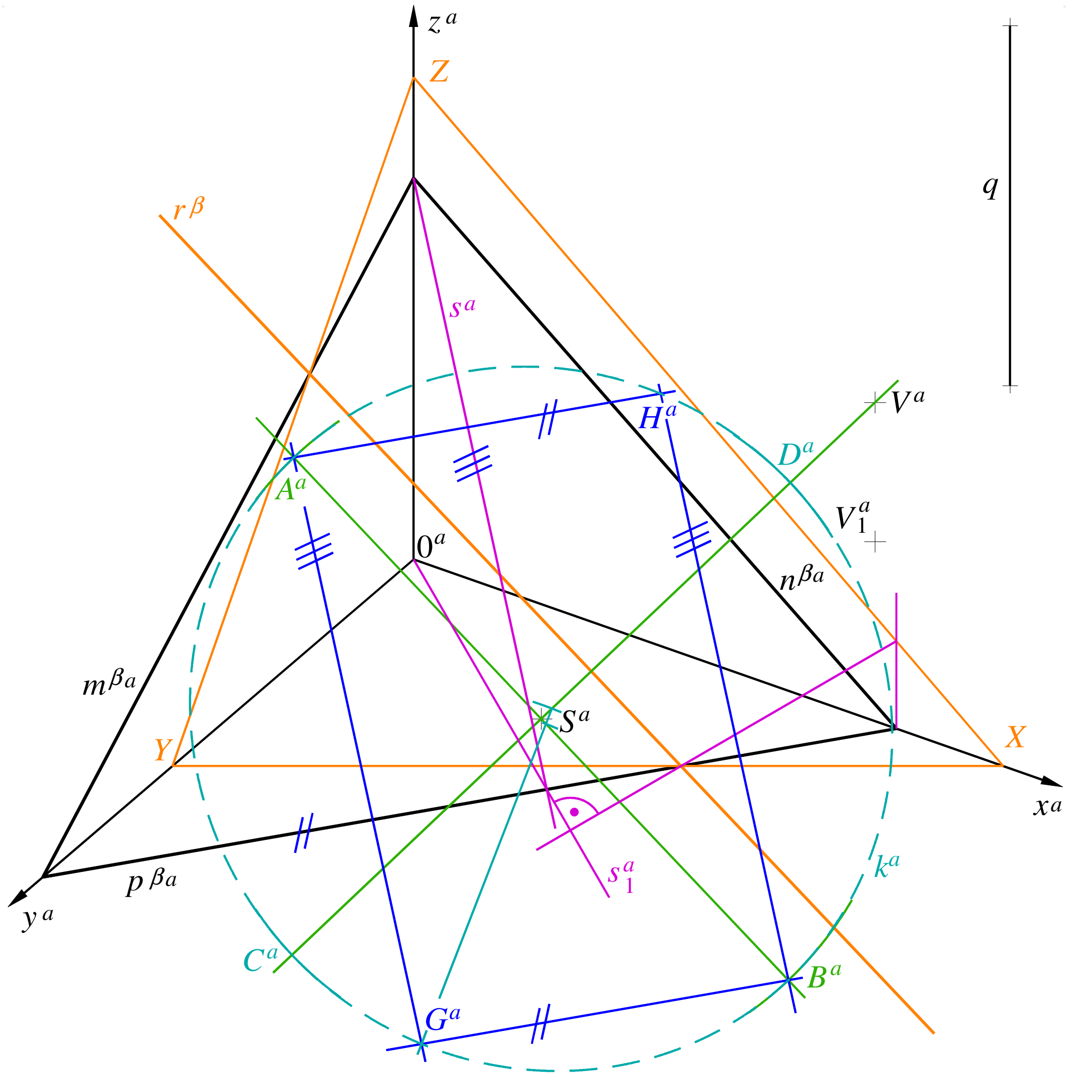
Středem elipsy k^a, kterým je axonometrický průmět S^a středu S kružnice k, sestrojíme rovnoběžku s axonometrickou stopou r^β roviny β. Tato přímka je hlavní osou elipsy k^a. Určíme hlavní vrcholy A^a, B^a elipsy k^a ležící na její hlavní ose ve vzdálenosti q od středu S^a a narýsujeme také vedlejší osu elipsy.



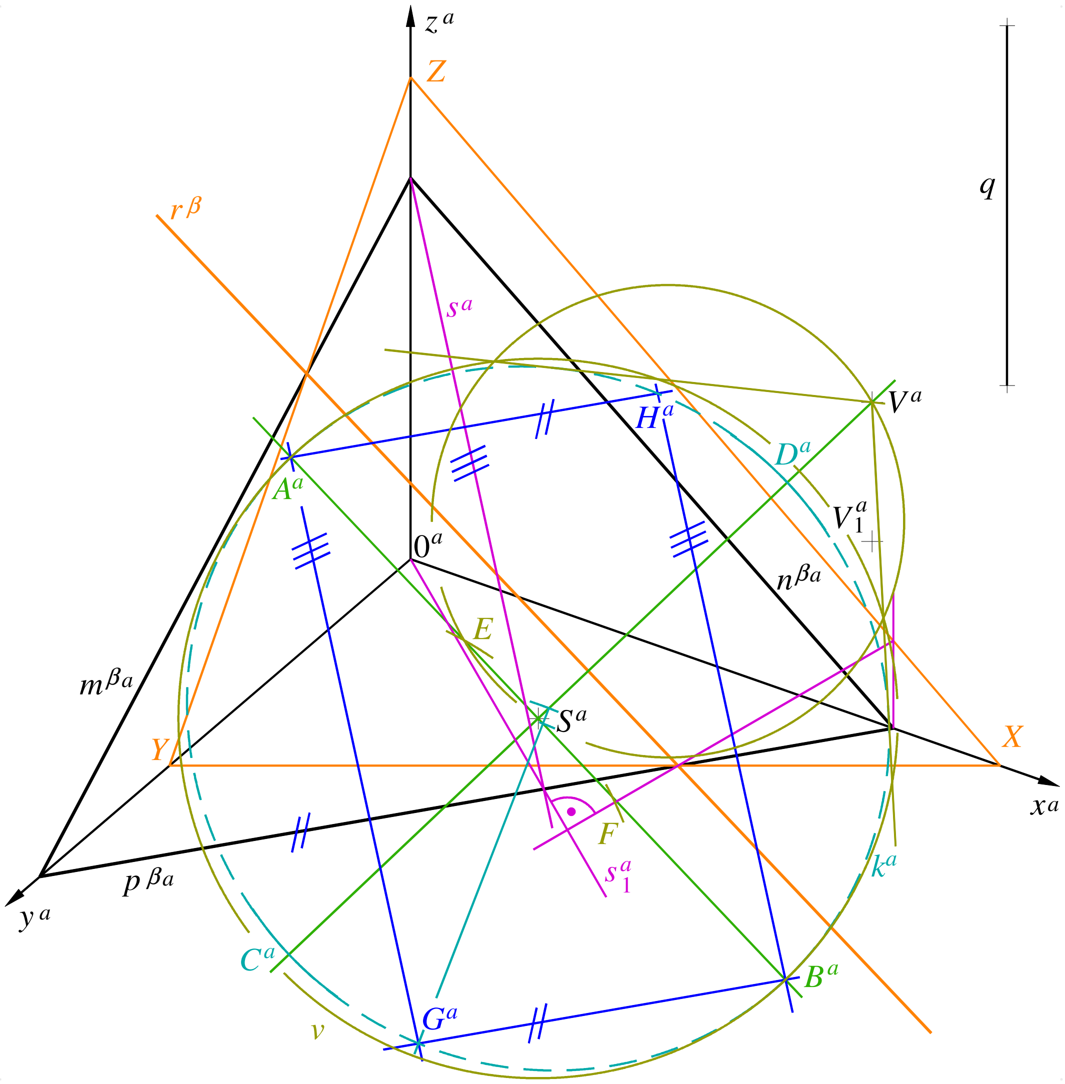
K dourčení elipsy k^a buď otočíme rovinu β kolem její axonometrické stopy r^β do axonometrické průmětny nebo nalezneme dvě přímky roviny β, které jsou navzájem kolmé. Těmi jsou například půdorysná stopa p^β roviny β a nějaká její spádová přímka první osnovy. Některým ze známých způsobů proto nalezneme axonometrický půdorys s_1^a spádové přímky s (na obrázku je znázorněn způsob využívající kolmosti přímky s_1^a a axonometrické stopy roviny, která je kolmá na půdorysnu $\pi = (x, y)$ a prochází půdorysnou stopou p^β roviny β) a následně i její axonometrický průmět s^a.



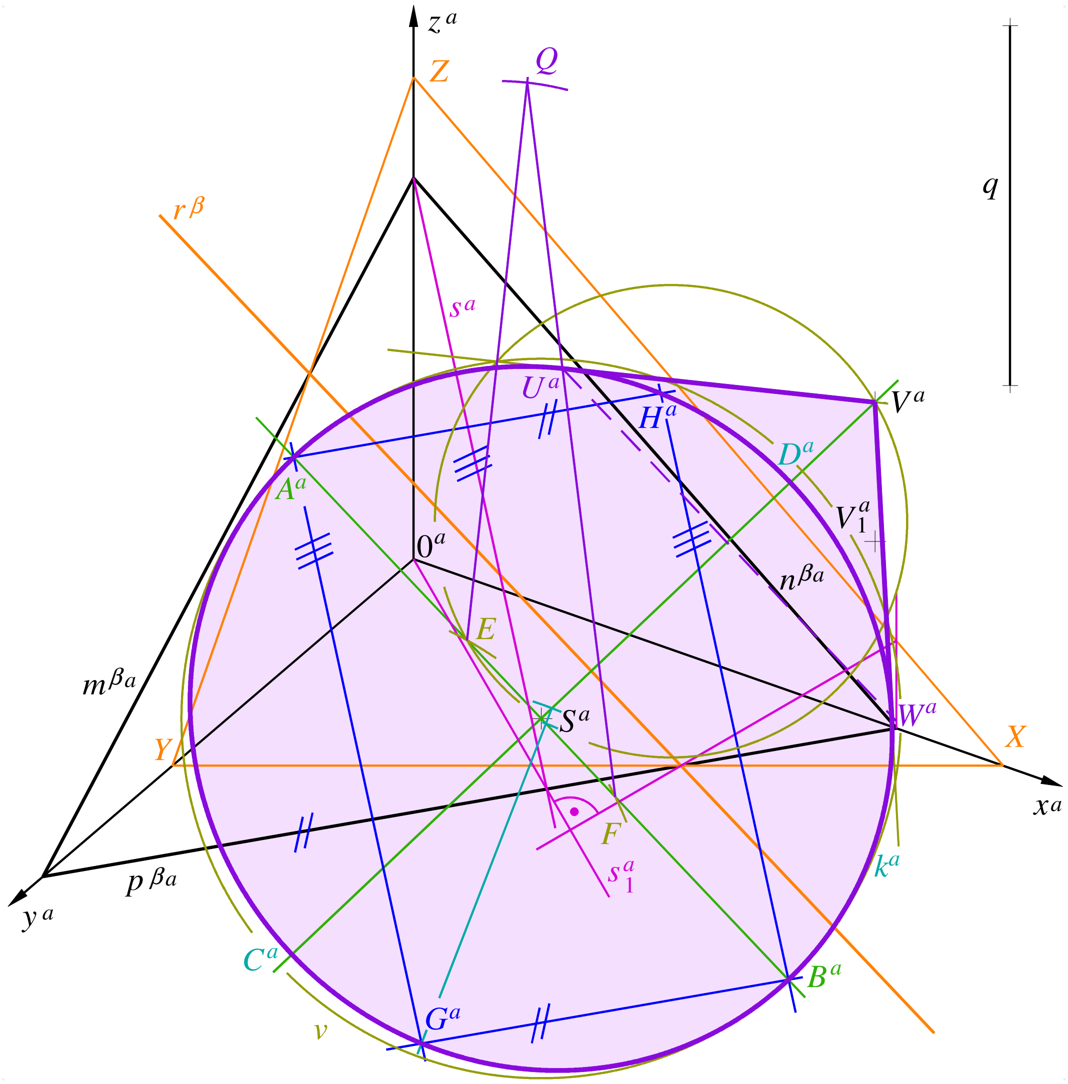
Hlavními vrcholy A^a, B^a elipsy k^a vedeme dvojici rovnoběžek s přímkami $p^{\beta a}$, s^a a sestrojíme jejich průsečík G^a, který je obecným bodem elipsy. (Protože dvojice rovnoběžek exisují dvě, můžeme obdobně získat také další obecný bod H^a.)



Pomocí rozdílové proužkové konstrukce elipsy (s využitím bodu G^a nebo H^a) získáme její vedlejší vrcholy C^a, D^a. Sestrojíme elipsu k^a s hlavními vrcholy A^a, B^a, vedlejšími vrcholy C^a, D^a a procházející body G^a, H^a.



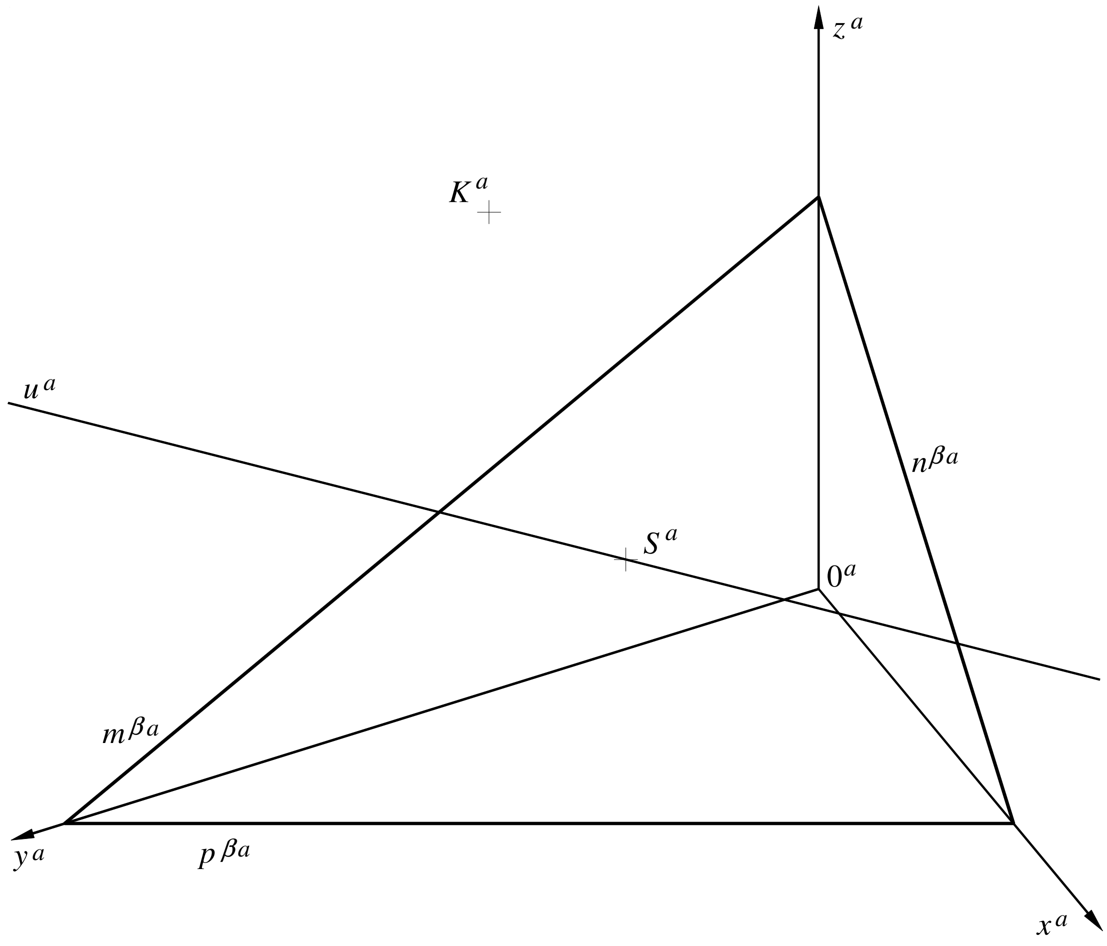
K dourčení zdánlivého obrysu kužele je nutné bodem V^a vést tečny elipsy k^a, což provedeme například pomocí ohniskových vlastností elipsy. Sestrojíme tedy nejprve ohniska E, F elipsy k^a. Průsečíky vrcholové kružnice v elipsy k^a s Thalétovou kružnicí sestrojenou nad průměrem, jehož krajními body jsou jedno z ohnisek (například ohnisko E) a bod V^a, jsou paty kolmic vedených ohnisky na tečny elipsy. Tyto paty jsou body hledaných tečen procházejících bodem V^a.

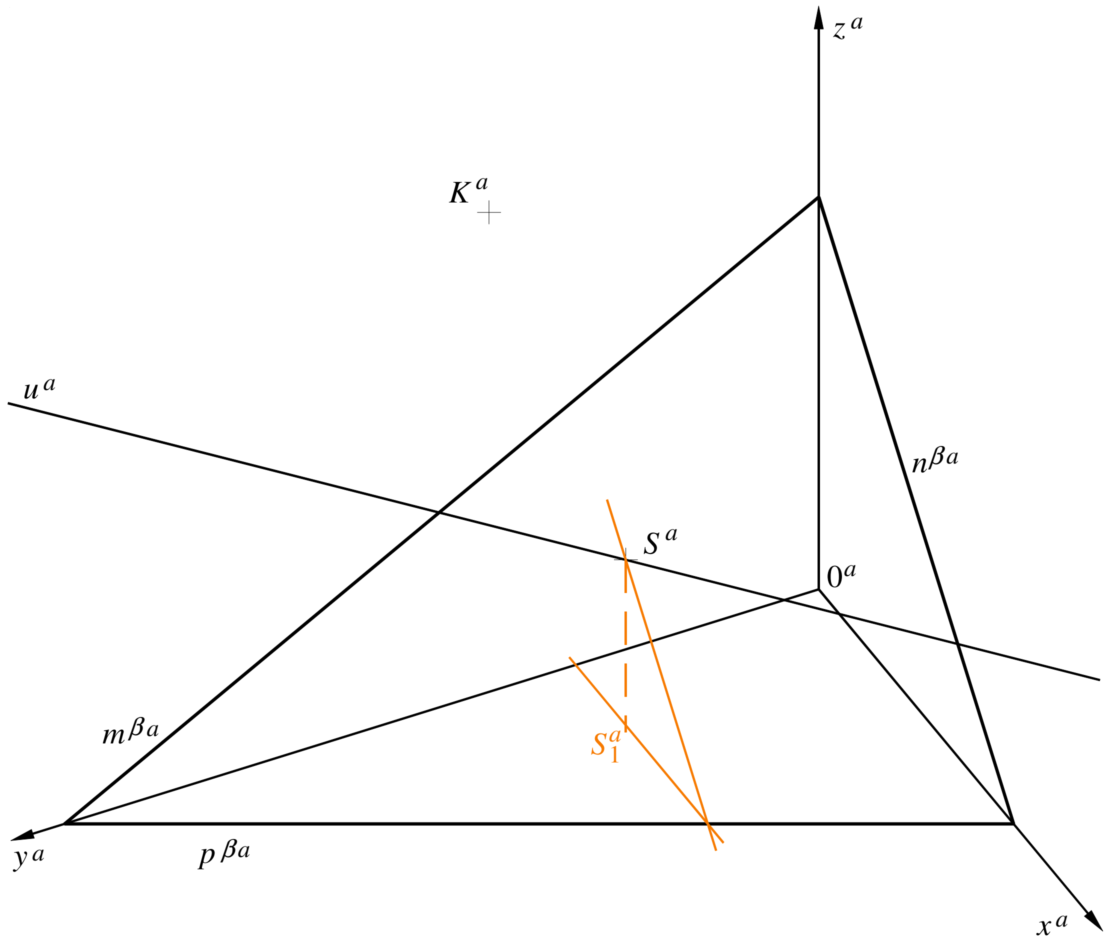


Sestrojíme body dotyku U^a, W^a těchto tečen, a to pomocí bodu Q souměrně sdruženého s jedním z ohnisek (např. s ohniskem E) podle jedné z tečen. Bod Q poté spojíme s druhým ohniskem. Průsečík této spojnice s uvažovanou tečnou je hledaný bod U^a. Bod dotyku W^a na druhé tečně můžeme hledat analogicky, nebo využijeme skutečnosti, že vedlejší osa elipsy k^a prochází bodem V^a, a je tedy osou souměrnosti jak elipsy, tak jejích tečen, resp. bodů dotyku U^a, W^a.

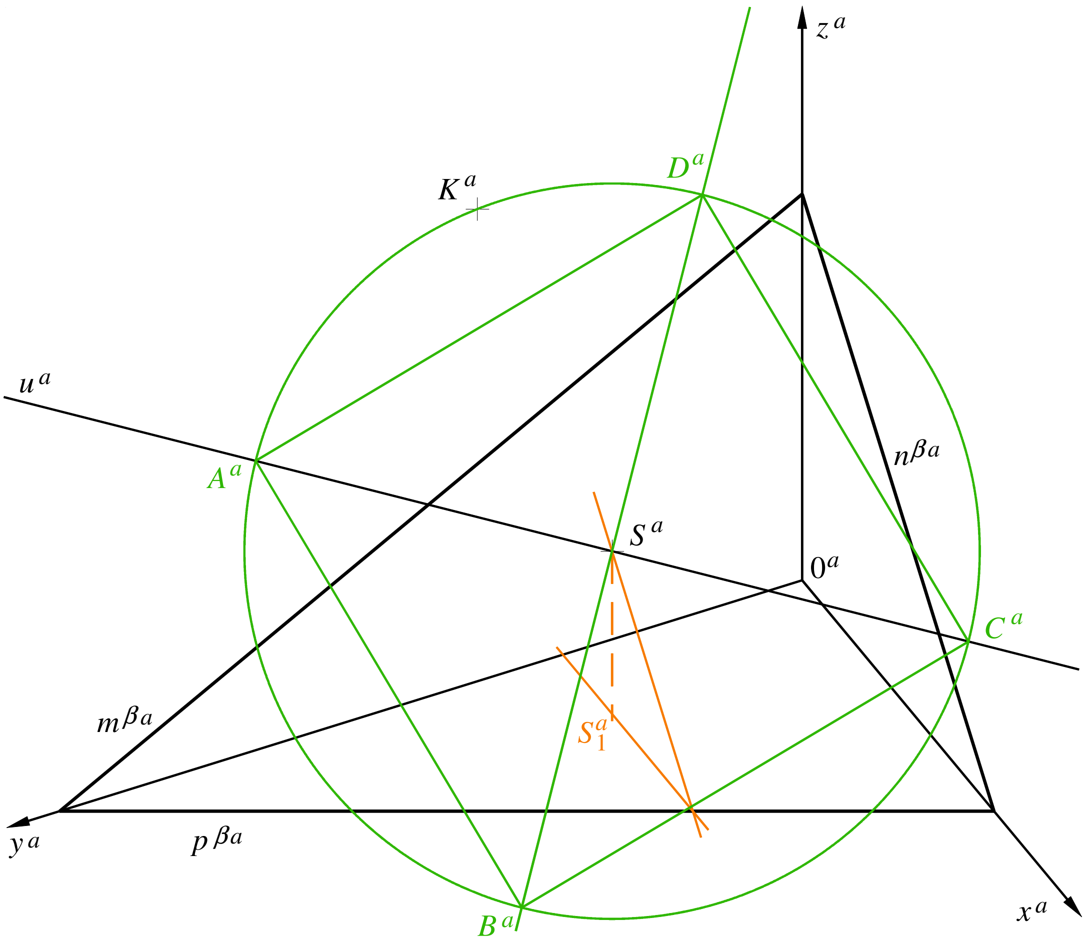
Zdánlivý obrys kužele tvoří úsečky V^aU^a, V^aW^a a část elipsy k^a. Vzhledem k tomu, že vrchol V tělesa leží ve stejném poloprostoru s hraniční rovinou β jako počátek 0 souřadnicového systému, je viditelná celá podstava kužele.

Příklad 4. V pravoúhlé axonometrii sestrojte axonometrický průmět krychle $ABCDEFGH$, jejíž stěna $ABCD$ leží v rovině β a má střed S. Jedna úhlopříčka stěny $ABCD$ leží na přímce u a kružnice této stěně opsaná prochází bodem K. Sestrojte takové řešení, aby $y^A < y^E$.

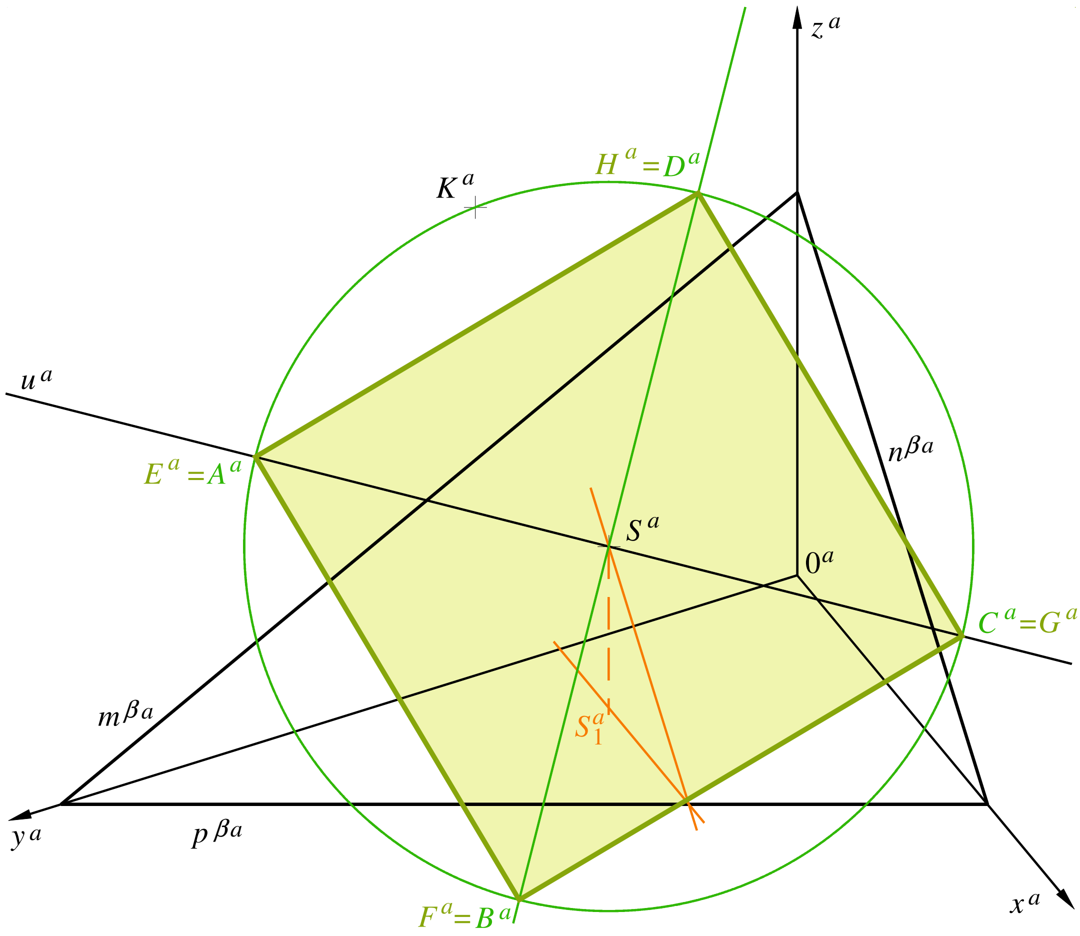




Nejprve například pomocí hlavní přímky druhé osnovy roviny β sestrojíme axonometrický půdorys S_1^a středu S podstavy krychle.

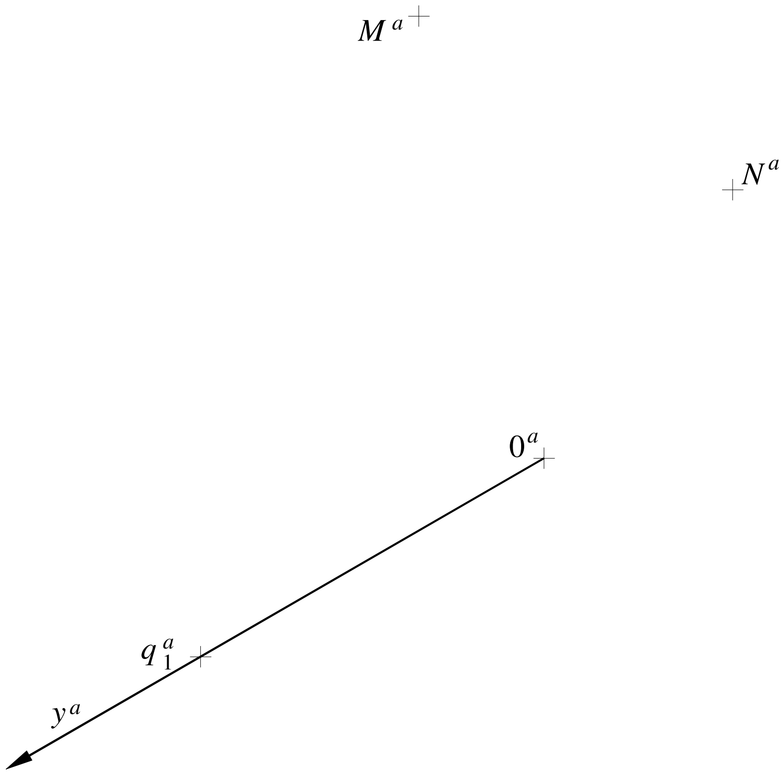


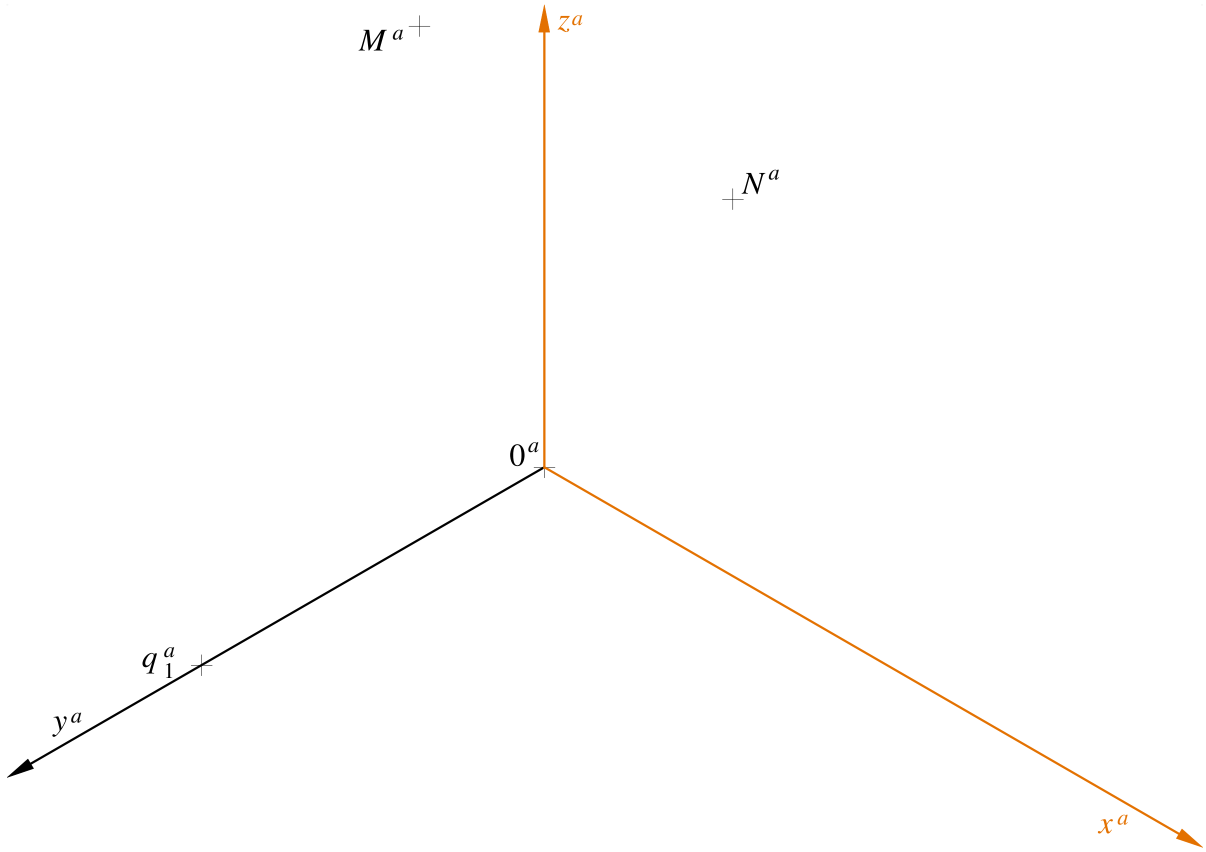
Při standardním postupu bychom nyní zvolili axonometrickou průmětnu, abychom mohli sestrojit axonometrickou stopu roviny β a kolem ní rovinu β otočit do axonometrické průmětny. Při volbě axonometrické průmětny však zjistíme, že axonometrické průměty stop roviny β jsou kolmé na axonometrické průměty os souřadnicového systému. Rovina β je proto axonometrickou průmětnou a čtverec $ABCD$ se promítáním nezkreslí. Sestrojíme tedy čtverec $A^aB^aC^aD^a$ o středu S^a, jehož úhlopříčkou je přímka u^a a pro nějž platí, že kružnice jemu opsaná prochází bodem K^a.



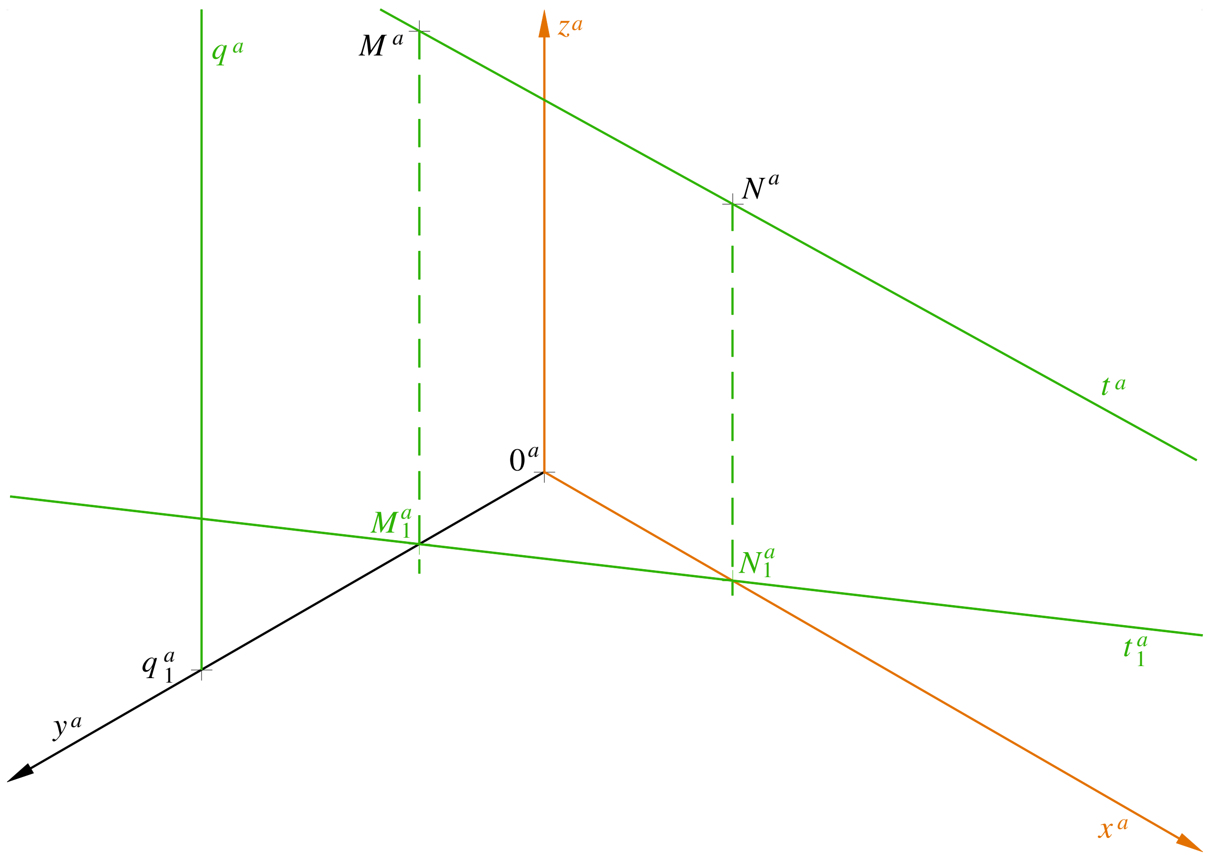
Vzhledem k poloze roviny β axonometrické průměty stěn $ABCD$ a $EFGH$ splývají. Tudíž $A^a = E^a$, $B^a = F^a$, $C^a = G^a$ a $D^a = H^a$ a axonometrickým průmětem krychle je čtverec $A^aB^aC^aD^a = E^aF^aG^aH^a$.

Příklad 5. V izometrii sestrojte axonometrický průmět rotační válcové plochy, která se dotýká bokorysny $\mu = (y,\, z)$ podél přímky q a jejíž tečnou je přímka MN, kde bod M leží v bokorysně $\mu = (y,\, z)$ a N leží v nárysně $\nu = (x,\, z)$. Ze všech řešení sestrojte takové, v němž mají všechny body válcové plochy nezáporné x-ové souřadnice.





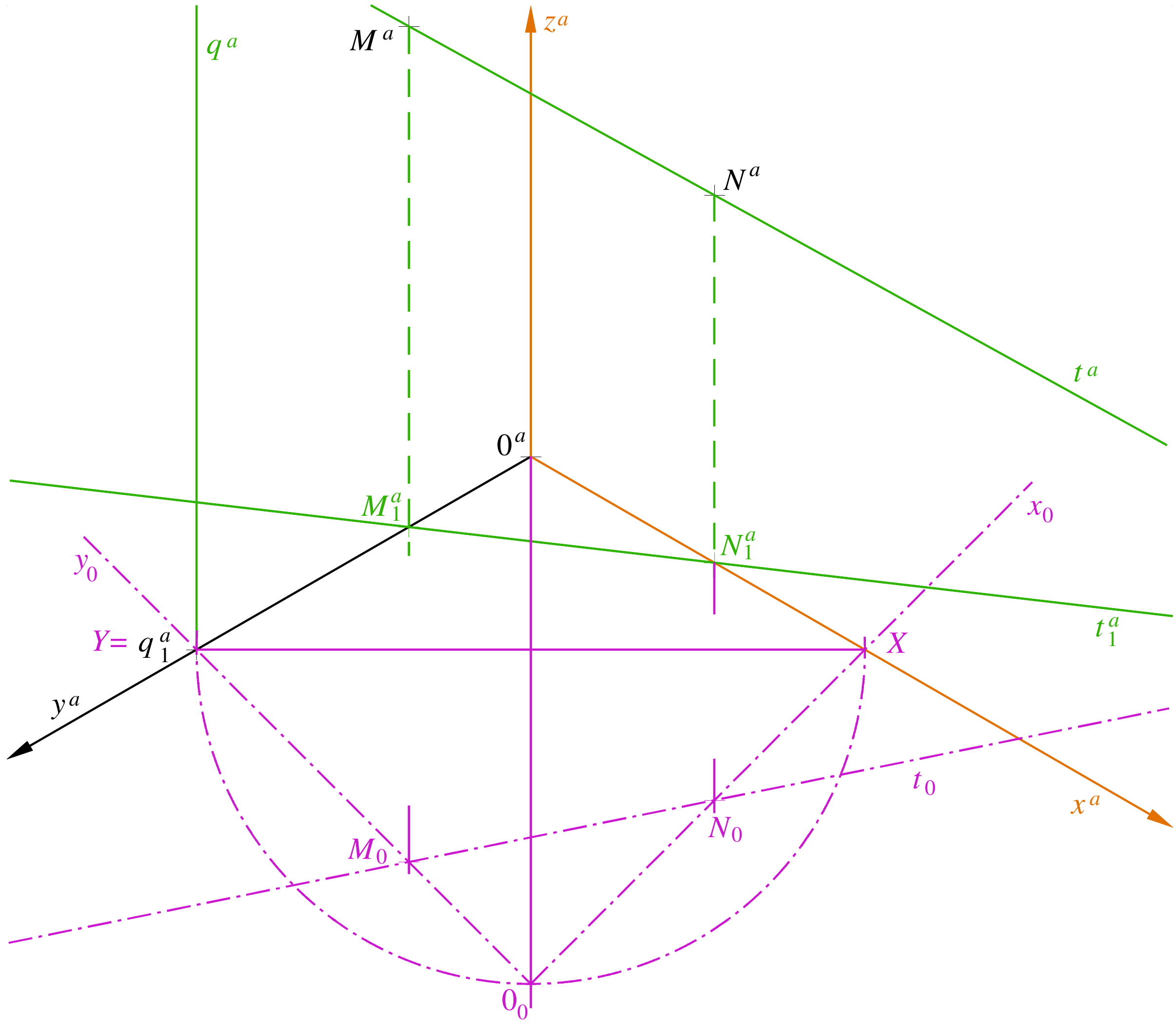
Sestrojíme zbývající axonometrické průměty x^a, z^a os x, z souřadnicového systému. Jelikož se jedná o izometrii, každá dvojice axonometrických průmětů os svírá úhel o velikosti 120°.



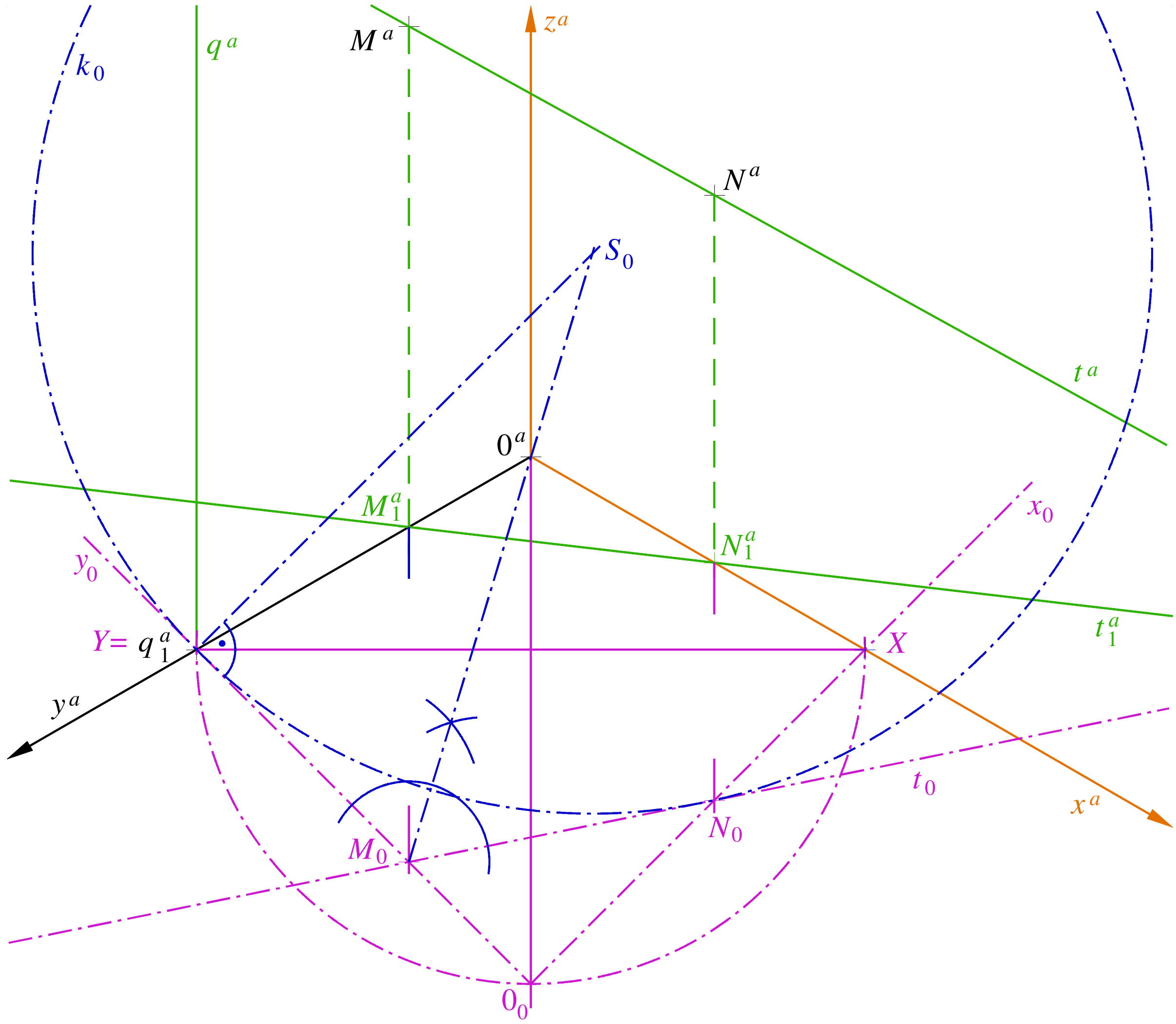
Protože axonometrický průmět q_1^a přímky q je bod, je přímka q, a tedy i osa válcové plochy, kolmá na půdorysnu. Sestrojíme axonometrický průmět q^a přímky q, což je rovnoběžka s axonometrickým průmětem z^a osy z procházející bodem q_1^a.

Určíme axonometrický průmět k^a kružnice k, která leží jak na válcové ploše, tak v půdorysně. Proto kromě axonometrického průmětu $t^a = M^a N^a$ tečny t určíme i její axonometrický půdorys $t_1^a = M_1^a N_1^a$.

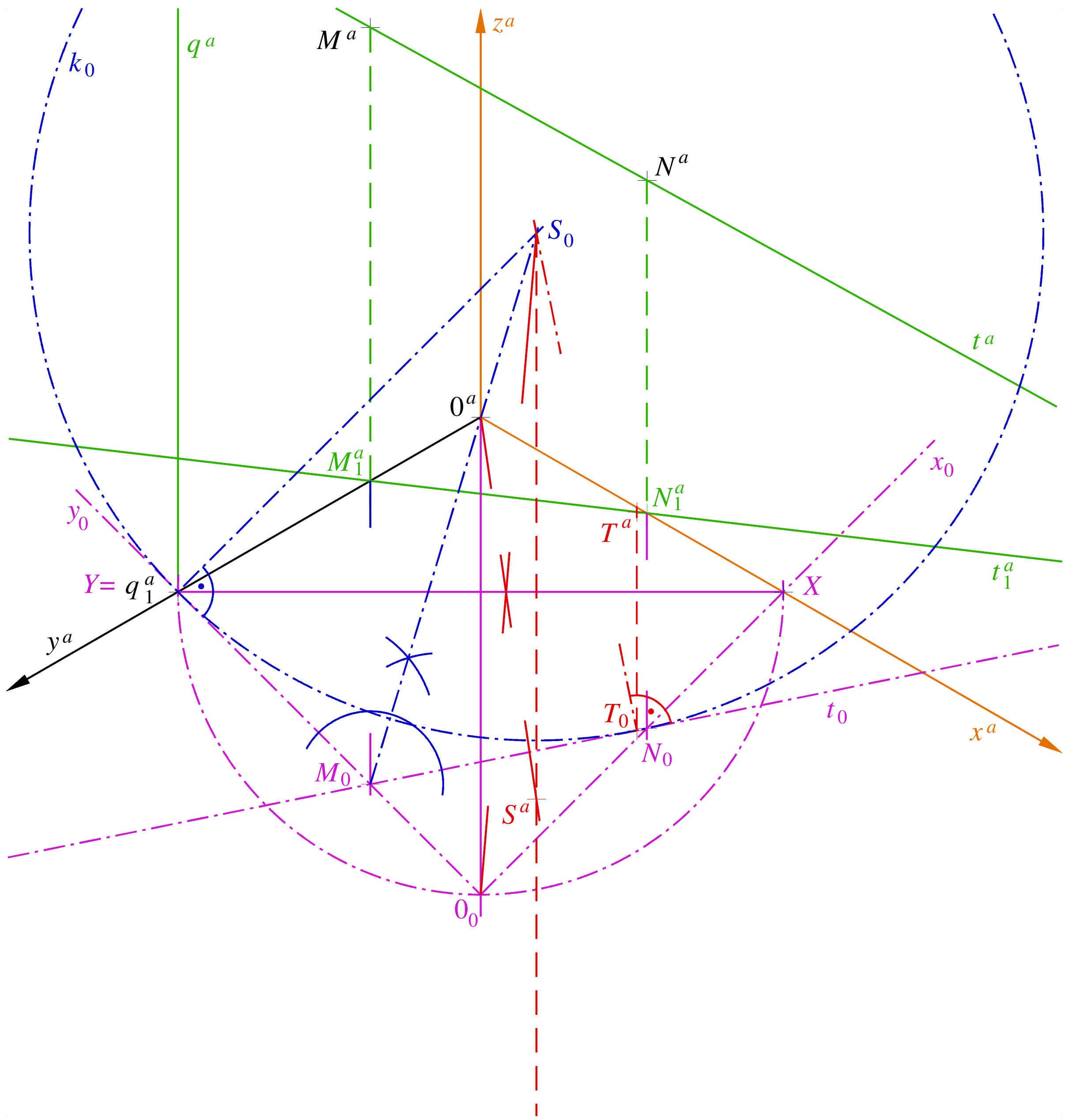
Přímky t_1^a a y^a jsou tečnami hledané elipsy k^a. Bodem dotyku elipsy k^a a přímky y^a je přitom bod q_1^a.



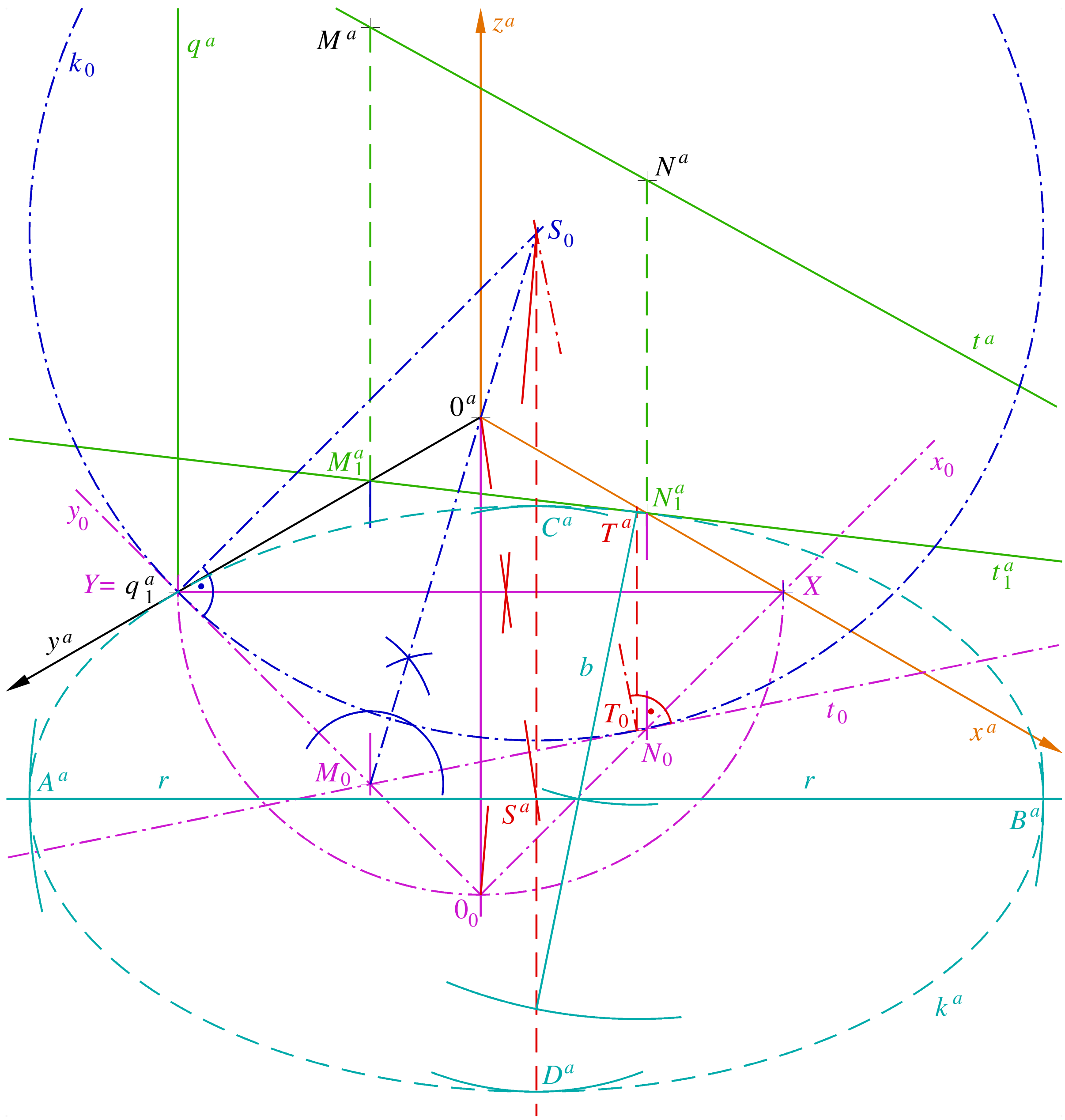
Zvolíme axonometrický trojúhelník, resp. alespoň jeho stranu XY. Půdorysnu otočíme kolem přímky XY do axonometrické průmětny. Konkrétně nejprve sestrojíme otočený počátek 0_0 a následně otočené osy x_0, y_0. Pomocí osové afinity v rovině s osou XY a dvojicí odpovídajících si bodů $0^a = 0_1^a$, 0_0 určíme otočené polohy M_0, N_0 axonometrických půdorysů M_1^a, N_1^a bodů M, N a následně otočenou polohu t_0 axonometrického půdorysu t_1^a tečny t.



Otočená kružnice k_0 se dotýká přímek y_0, a to v bodě q_1^a, a t_0. Střed S_0 kružnice k_0 proto leží na kolmici vedené bodem q_1^a na přímku y_0 a dále na ose úhlu svíraného přímkami y_0 a t_0. Sestrojujeme přitom takové řešení, aby splňovalo požadavek na nezápornost x-ových souřadnic bodů válcové plochy. Po nalezení bodu S_0 sestrojíme otočenou kružnici k_0 se středem S_0 a procházející bodem q_1^a.

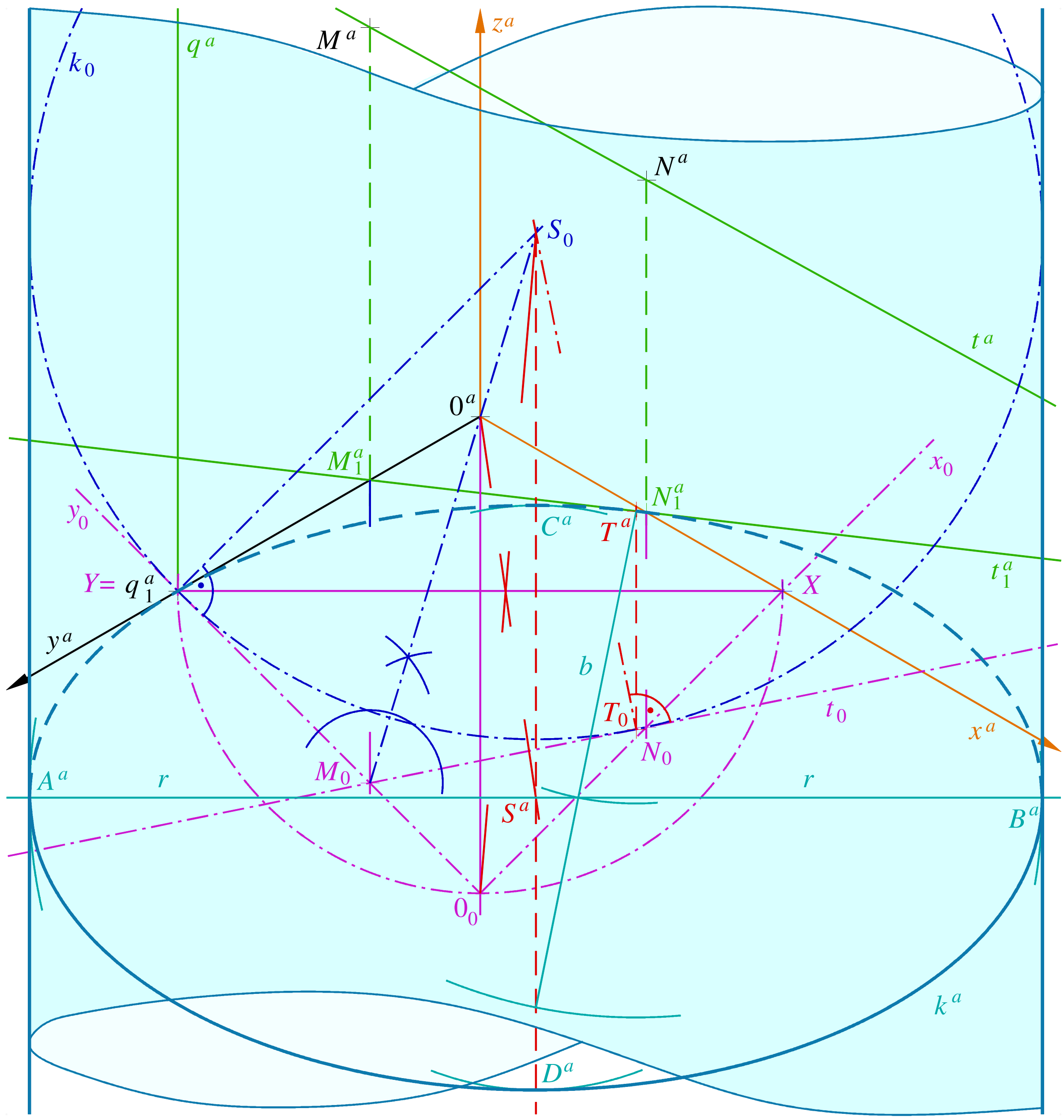


Určíme bod dotyku T_0 kružnice k_0 a přímky t_0. Pomocí výše zmíněné osové afinity sestrojíme axonometrický průmět S^a bodu S a také axonometrický průmět T^a bodu dotyku T tečny t a kružnice k.



Sestrojíme axonometrický průmět k^a kružnice k^a. Středem elipsy k^a je bod S^a, její hlavní osa je rovnoběžná s přímkou XY a její hlavní vrcholy A^a, B^a leží ve vzdálenosti $r = |S_0 q_1^a| = |S_0 T_0|$ od bodu S^a. Vedlejší vrcholy C^a, D^a určíme pomocí rozdílové proužkové konstrukce (s využitím bodu T^a; případně $Y = q_1^a$), nebo pomocí již několikrát uvedené osové afinity.

Elipsa k^a prochází body A^a, B^a, C^a, D^a, T^a, $Y = q_1^a$. Jejími tečnami jsou přímky y^a (s bodem dotyku $Y = q_1^a$) a t_1^a (s bodem dotyku T^a).



Nakonec sestrojíme axonometrický průmět válcové plochy, kterým je rovinný pás. Jeho hraničními přímkami jsou tečny elipsy k^a rovnoběžné s přímkou z^a, tj. rovoběžky s přímkou z^a procházející body A^a, B^a.