PROJEKTIVNÍ UZÁVĚR AFINNÍ ALGEBRAICKÉ MNOŽINY

JAN ŠŤOVÍČEK

Nechť K je těleso a $n \geq 1$ je přirozené číslo. Budeme uvažovat zobrazení

$$\begin{aligned} \varphi_0\colon \qquad \mathbb{A}^n(\overline{K}) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{K}) \\ (c_1, c_2, \dots, c_n) &\longmapsto (1 : c_1 : c_2 : \dots : c_n) \end{aligned}$$

Obraz φ_0 označme jako U_0. Víme, že φ_0 je prosté zobrazení, a tedy určuje bijekci $\mathbb{A}^n(\overline{K})$ na U_0. Následující je jednoduché pozorování.

Lemma 33. *U_0 je otevřená množina v projektivní Zariského topologii.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(d_0 : d_1 : \dots : d_n) \mid d_0, d_1, \dots, d_n \in \overline{K} \text{ a } d_0 \neq 0\} \\ &= \mathbb{P}^n(\overline{K}) \setminus \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{X_0\}), \end{aligned}$$

kde $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{X_0\}) = \{(d_0 : d_1 : \dots : d_n) \mid d_0 = 0\}$ je projektivní algebraická množina (dokonce varieta). $\square$

K přechodu od projektivní algebraické množiny k afinní a naopak máme k dispozici následující konstrukce.

Zúžení projektivní algebraické množiny na afinní. Nechť $X = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(S)$ je projektivní algebraická množina v $\mathbb{P}^n(\overline{K})$, kde $S \subseteq K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ je nějaká množina homogenních polynomů.

Definice. *Zúžením projektivní algebraické množiny X na afinní* rozumíme množinu $X_* = \varphi_0^{-1}(X)$.

V první řadě nahlédneme, že X_* je z definice skutečně podmnožina $\mathbb{A}^n(\overline{K})$. Kdybychom ztotožnili $\mathbb{A}^n(\overline{K})$ s U_0 přes zobrazení φ_0, dostali bychom vztah "$X_* = X \cap \mathbb{A}^n(\overline{K})$."

Aby terminologie dávala smysl, ukážeme, že X_* je skutečně afinní algebraická množina. K tomu bude užitečné následující značení.

Značení. Je-li $F(X_0, X_1, \dots, X_n)$ forma z $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$, označíme symbolem F_* polynom z $K[y_1, \dots, y_n]$ daný vztahem

$$F_*(y_1, \dots, y_n) = F(1, y_1, \dots, y_n).$$

To jest za první neurčitou dosadíme 1 a ostatní pouze přejmenujeme.

Je-li $S \subseteq K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ množina forem, symbolem S_* označíme množinu polynomů

$$S_* = \{F_*(y_1, \dots, y_n) \mid F \in S\}.$$

Verze z 29. května 2013.

Pozorování. Přímo z definice φ_0 se snadno nahlédne, že pro $X = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(S)$ platí vztah

$$X_* = \mathrm{V}_{\mathrm{afin}}(S_*).$$

Speciálně je X_* skutečně afinní algebraická množina.

Projektivní uzávěr afinní algebraické množiny. Začneme-li s afinní algebraickou množinou $Y \subseteq \mathbb{A}^n(\overline{K})$, je situace o něco komplikovanější. Množina $\varphi_0(Y) \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$ totiž zpravidla projektivní algebraická množina není. Musíme vzít tzv. projektivní uzávěr.

Definice. *Projektivním uzávěrem* Y se rozumí projektivní algebraická množina $Y^* \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$, která obsahuje $\varphi_0(Y)$ a vzhledem k inkluzi je nejmenší taková, že $\varphi_0(Y) \subseteq Y^*$.

Pozorování. Projektivní uzávěr vždy existuje. Uvažujme průnik všech projektivních algebraických množin X takových, že $\varphi_0(Y) \subseteq X$. Podle lemmatu 28 z přednášky je tento průnik opět projektivní algebraickou množinou a též obsahuje $\varphi_0(Y)$, čili splňuje požadavky na projektivní uzávěr. Podobnou úvahou odvodíme, že projektivní uzávěr je definován jednoznačně.

Abychom tomuto pojmu lépe rozuměli, rozebereme, jak je Y^* určen pomocí polynomiálních rovnic. K tomu opět bude vhodné zavést značení.

Značení. Nechť $f \in K[y_1, \dots, y_n]$ je nenulový polynom celkového stupně $d \geq 0$. Pak položíme

$$f^*(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n) = X_0^d \cdot f\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

Pro úplnost definujeme pro nulový polynom $0^* = 0$.

Pozorování. Ač na první to pohled vypadá, že f^* je pouze racionální funkce v proměnných $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$, velice snadno se nahlédne, že f^* je ve skutečnosti homogenní polynom stupně d a navíc f^* v okruhu polynomů $K[X_0, X_1, X_2, \dots, X_n]$ *není* dělitelný polynomem X_0.

Toto značení rozšíříme i na množiny polynomů a ideály.

Značení. Je-li $S \subseteq K[y_1, \dots, y_n]$ množina polynomů, položíme

$$S^* = \{f^* \mid f \in S\}.$$

Tj. S^* je množina forem.

Je-li $I \subseteq K[y_1, \dots, y_n]$ ideál, budeme pod označením I^* rozumět

$$I^* = (f^* \mid f \in S),$$

tj. homogenní ideál okruhu $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ *generovaný* formami f^* přes všechna $f \in I$.

Poznámka. Toto značení vnáší určitou nejednoznačnost, protože ideál lze též považovat za množinu a definice I^* se v těchto dvou významech liší. Proto se vždy pokusíme formulovat tvrzení tak, aby byl význam I^* zřejmý. Obecně se lze řídit pravidlem, že kdykoliv je I ideál, budeme brát I^* také jako ideál.

Velice užitečný vztah ideálů I a I^* lze shrnout v následujícím lemmatu, které bylo v přednášce součástí důkazu tvrzení 34.

Lemma. *Nechť K je těleso, $n \geq 1$ je přirozené číslo, $I \subseteq K[y_1, \dots, y_n]$ je ideál a $F \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ je forma. Pak pro homogenní ideál $I^* \subseteq K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ definovaný výše platí, že*

$$F \in I^* \iff F_* \in I.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $F \in I^*$. Tedy F je tvaru

$$F = C_1 \cdot f_1^* + \dots + C_\ell \cdot f_\ell^*,$$

kde $C_1, \dots, C_\ell \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ jsou formy a $f_1, \dots, f_\ell \in I$. Z konstrukce snadno plyne, že $(f_i^*)_* = f_i$ pro všechna i a že přiřazení $F \mapsto F_*$ určuje homomorfismus K-algeber $K[X_0, X_1, \dots, X_n] \to K[y_1, \dots, y_n]$ (jde vlastně pouze o dosazování jedničky za X_0.) Dohromady dostáváme, že

$$F_* = (C_1)_* \cdot f_1 + \dots + (C_\ell)_* \cdot f_\ell,$$

což je zjevně prvek ideálu I.

Nechť naopak $F_* \in I$. Předpokládejme navíc, že $F \neq 0$, jinak bychom triviálně měli $F \in I^*$. Z konstrukce pak není těžké nahlédnout, že $(F_*)^*$ musí dělit F a navíc $F = X_0^s \cdot (F_*)^*$, kde $s \geq 0$ je největší takové, že X_0^s dělí formu F. Je-li tedy $F_* \in I$, pak z definice $(F_*)^* \in I^*$, a proto i $F \in I^*$. □

Nyní už budeme umět určit množinu polynomiálních rovnic, jejichž řešením je Y^*.

Tvrzení 34. *Nechť K je těleso, $n \geq 1$ je přirozené číslo a $Y \subseteq \mathbb{A}^n(\overline{K})$ je afinní algebraická množina určená nad K. Položíme-li $I = \mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y) \subseteq K[y_1, \dots, y_n]$, dostaneme rovnost $Y^* = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(I^*)$.*

Je-li navíc Y nadplocha, tj. existuje nekonstantní polynom $f(y_1, \dots, y_n)$ takový, že $Y = \mathrm{V}_{\mathrm{afin}}(\{f\})$, pak dokonce $Y^* = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{f^*\})$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\varphi_0(Y) \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(I^*)$. Ekvivalentně musíme dokázat, že pro každou formu $F \in I^*$ je F nulové na celém $\varphi_0(Y)$. Jinak řečeno, je-li $F \in I^*$ forma, potřebujeme, aby $F_* \in \mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y) = I$. To jsme ale dokázali v předchozím lemmatu.

Nechť $X \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{K})$ je nyní projektivní algebraická množina určená nad K a obsahující $\varphi_0(Y)$. Musíme ukázat, že $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(I^*) \subseteq X$, nebo ekvivalentně, že $\mathrm{I}_{\mathrm{proj}}(X) \subseteq I^*$. Pak bude $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(I^*)$ minimální vzhledem k inkluzi, a tedy bude projektivním uzávěrem Y.

Předpokládejme tedy, že $F \in \mathrm{I}_{\mathrm{proj}}(X)$ je forma. Jelikož $\varphi_0(Y) \subseteq X$, podobnou úvahou jako na začátku důkazu dostaneme, že F je nulové na celém $\varphi_0(Y)$, a tedy $F_* \in \mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y) = I$. Z předchozího lemmatu pak vidíme, že $F \in I^*$, což jsme chtěli dokázat.

Nakonec uvažme případ, kdy $Y = \mathrm{V}_{\mathrm{afin}}(\{f\})$ pro nekonstantní polynom f. Pak $\varphi_0(Y) \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{f^*\})$, protože $(f^*)_* = f$. Je-li X projektivní algebraická množina obsahující $\varphi_0(Y)$ a je-li $F \in \mathrm{I}_{\mathrm{proj}}(X)$, pak opět $F_* \in \mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y)$. Z věty 11 (Hilbertova věta o nulách) ale nyní máme, že $\mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y) = \sqrt{(f)}$, a tedy polynom $(F_*)^t$ je pro nějaké $t \geq 1$ dělitelný polynomem f. Odtud plyne, že forma $((F^t)_*)^*$ je dělitelná formou f^* a, protože $F^t = X_0^s \cdot ((F^t)_*)^*$ pro nějaké $s \geq 0$, je i F^t dělitelné formou f^*. Tímto jsme dokázali, že $\mathrm{I}_{\mathrm{proj}}(X) \subseteq \sqrt{(f^*)}$, a tedy

$$X \supseteq \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\sqrt{(f^*)}) = \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{f^*\}).$$

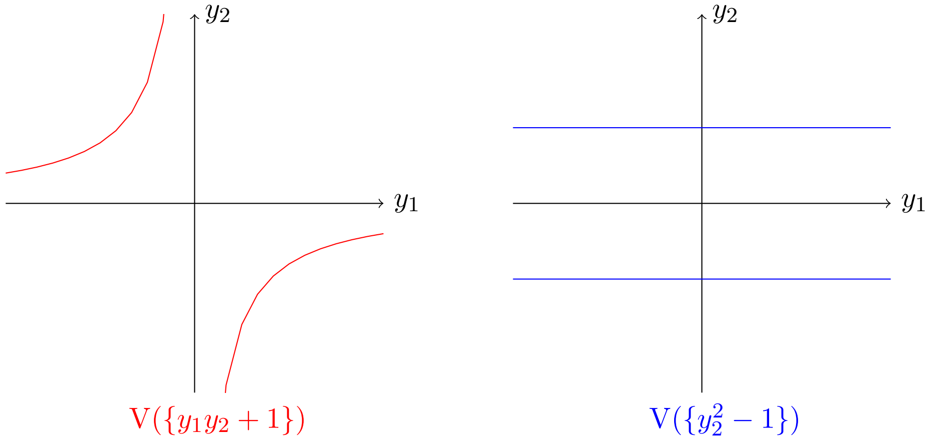
□

Varování. Pokud Y není nadplocha, pak určení rovnic pro Y^* z rovnic pro Y může být početně komplikovanější. Je-li totiž S nějaká množina polynomů taková, že $Y = \mathrm{V}_{\mathrm{afin}}(S)$, pak sice $Y^* \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(S^*)$, ovšem není-li S jednoprvkové, může být tato inkluze vlastní. Algebraická množina $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(S^*)$ totiž obecně může obsahovat ireducibilní komponenty, které celé leží v množině $H_\infty = \mathbb{P}^n(\overline{K}) \setminus U_0$ (tj. "v nekonečnu"). Uvedeme příklad:

Příklad. Nechť $n = 2$ a $K = \mathbb{R}$ a uvažujme $Y = \mathrm{V}_{\mathrm{afin}}(S)$, kde

$$S = \{y_1 y_2 + 1, y_2^2 - 1\} \subseteq \mathbb{R}[y_1, y_2].$$

První rovnice určuje v $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ hyperbolu, druhá dvojici rovnoběžek:



Z obrázků jsou vidět dvě společná řešení pro obě tyto rovnice: $P_1 = (-1, 1)$ a $P_2 = (1, -1)$. Přímým výpočtem se snadno ověří, že to jsou všechna společná řešení v $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, tedy

$$Y = \{P_1, P_2\}.$$

V tomto případě je i $\varphi_0(Y) = \{(1 : -1 : 1), (1 : 1 : -1)\} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ projektivní algebraická množina, protože je to konečná množina. Konkrétněji platí, že

$$\begin{aligned}\{(1 : -1 : 1)\} &= \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(X_1 + X_0, X_2 - X_0),\\ \{(1 : 1 : -1)\} &= \mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(X_1 - X_0, X_2 + X_0)\end{aligned}$$

a sjednocení konečně mnoha algebraických množin je podle lemmatu 28 algebraická množina. Podle definice to ovšem znamená, že

$$Y^* = \{(1 : -1 : 1), (1 : 1 : -1)\}.$$

Na druhou stranu máme $S^* = \{X_1X_2 + X_0^2, X_2^2 - X_0^2\}$ a přímým výpočtem snadno zjistíme, že

$$\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(S^*) = \{(1 : -1 : 1), (1 : 1 : -1), (0 : 1 : 0)\}.$$

Vysvětlení tohoto fenoménu dává např. Bezoutova věta (věta 42). Projektivní rovinné křivky $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{X_1X_2 + X_0^2\})$ a $\mathrm{V}_{\mathrm{proj}}(\{X_2^2 - X_0^2\})$ musí mít čtyři průniky, což souhlasí, neboť se ukáže, že $(0 : 1 : 0)$ je dvojnásobný průnik.

Abychom porozuměli tomu, kde nastal problém, uvědomme si, že $I = \mathrm{I}_{\mathrm{afin}}(Y)$ obsahuje i polynom $y_1 + y_2$, a tedy I^* obsahuje $X_1 + X_2$. Homogenní ideál generovaný S^* ani jeho radikál však formu $X_1 + X_2$ neobsahují. Máme sice $\sqrt{(S^*)} \subseteq I^*$, ale rovnost obecně neplatí.