ALGEBRA I (NMAG 201) – DOMÁCÍ ÚLOHY 10

Termín odevzdání: 15. 12. 2014 do 19:00 hod.

(1) Které z následujících podmnožin jsou ideály? Které z nich jsou hlavní?

(a) Podmnožina $\{f \in \mathbb{C}[x] \mid f \text{ má násobný kořen v bodě } 2\}$ okruhu $\mathbb{C}[x]$,

(b) podmnožina $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 5\}$ okruhu $\mathbb{R}[x]$,

(c) podmnožina $\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \text{ je sudé}\}$ okruhu $\mathbb{Z}[x]$,

(d) podmnožina $\{2u + (1+\sqrt{5})v \mid u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]\}$ okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$,

(e) podmnožina $\{91u + 343v \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$ okruhu celých čísel.

Odpovědi zdůvodněte.

(5 bodů)

(2) Nechť T je těleso a

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

je posloupnost prvků T. Řekneme, že tato posloupnost *splňuje lineární rekurenci*, pokud existuje číslo $N \geq 1$ a prvky $c_1, c_2, \ldots, c_N \in T$ takové, že

$$a_i = c_1 \cdot a_{i-1} + c_2 \cdot a_{i-2} + \cdots + c_N \cdot a_{i-N}$$

pro každé $i \geq N$.

Ukažte, že posloupnost $(a_i)_{i\geq 0}$ prvků T splňuje lineární rekurenci, právě když lze mocninou řadu $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ zapsat v $T[[x]]$ jako podíl dvou polynomů nad T. Zapište jako podíl dvou nesoudělných polynomů mocninnou řadu

$$1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \cdots$$

nad $\mathbb{Q}$, kde koeficienty jsou Fibonacciho čísla. Vše řádně zdůvodněte.

(5 bodů)

(3) Nalezněte v $\mathbb{Q}[x]$ všechny polynomy f stupně nejvýše 2 takové, že f i f^2 dávají stejný zbytek po dělení polynomem $x^3 - x^2 + x - 1$. Dokažte, že jste skutečně našli všechny takové polynomy. Nápověda: Použijte Čínskou větu o zbytcích pro polynomy.

(5 bodů)