

ALGEBRA I (NMAG 201) – DOMÁCÍ ÚLOHY 11

Termín odevzdání: 5. 1. 2015 do 19:00 hod.

- (1) Rozhodněte, zda pro danou množinu G s danou binární operací $*$: $G \times G \rightarrow G$ existují operace $'$ a konstanta e tak, aby $(G, *, ', e)$ byla grupa:
- (a) $G = \mathbb{Q}$, tj. množina racionálních čísel, s operací násobení.
 - (b) Podmnožina $G \subseteq \mathbb{Z}_{1024}$ sestávající ze všech lichých čísel s operací násobení modulo 1024.
 - (c) Množina G všech konečných podmnožin množiny přirozených čísel s operací symetrické diference. Tj. podle definice

$$X * Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Odpovědi zdůvodněte.

(5 bodů)

- (2) Kolik prvků má podgrupa grupy $(\mathbb{Z}_{60}, +, -, 0)$ generovaná prvky 18 a 45? Odpověď zdůvodněte.

(5 bodů)

- (3) Napište generátory nějaké podgrupy H_1 řádu 10 v symetrické grupě $(S_5, \circ, {}^{-1}, \text{id})$.

Dále napište generátory nějaké podgrupy H_2 řádu 4 v symetrické grupě $(S_4, \circ, {}^{-1}, \text{id})$ takové, že H_2 neobsahuje žádný prvek řádu 4.

V obou případech ukažte, že Vámi nalezené generátory opravdu generují podgrupy s požadovanými vlastnostmi.

(5 bodů)