Algebra 2 (NMAG 202)

poznámky k streamu

Jan Šťovíček

20. 4. 2020

Katedra algebry MFF UK

Faktorgrupy – připomenutí

- Buď $(G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ grupa a $N \trianglelefteq G$ normální podgrupa.
- Pak máme grupu $(G/N, \cdot, ^{-1}, 1_{G/N})$, kde
    - $G/N = \{aN \mid a \in G\} = \{Na \mid a \in G\}$,
    - $aN \cdot bN := (ab)N$,
    - $(aN)^{-1} := (a^{-1})N$,
    - $1_{G/N} := 1N = N$.

První věta o isomorfismu

Věta 6.2
Buď $\varphi\colon G \to H$ homomorfismus grup.

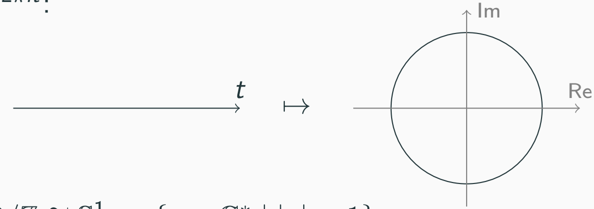
1. Je-li $N \trianglelefteq G$ obsažena v $\mathrm{Ker}(\varphi)$, pak je zobrazení
$$G/N \to H$$
$$aN \mapsto \varphi(a)$$
dobře definovaný grupový homomorfismus.
2. $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

Důkaz:

1. $aN = bN \iff b^{-1}a \in N \implies$
$\varphi(b^{-1}a) = 1 \iff \varphi(b)^{-1}\varphi(a) = 1 \iff \varphi(a) = \varphi(b)$.
2. Použijeme předchozí pro $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Pak máme grupový homomorfismus $G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$, $a\,\mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(a)$. Ten je zřejmě na a je prostý, protože
$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff b^{-1}a \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff a\,\mathrm{Ker}(\varphi) = b\,\mathrm{Ker}(\varphi).$$

Příklady

- Uvažte grupový homomorfismus $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ daný předpisem $t \mapsto e^{2\pi i t}$:



  Pak $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$.
- Aplikujeme-li 1. větu o iso na $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \mathbb{Z}_2$, dostaneme přímo $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.
- Uvažujme grupový homomorfismus $\det\colon GL_n(T) \to T^*$. Pak $\operatorname{Ker}(\det)$ normální podgrupa

$$SL_n(T) = \{M \in GL_n(T) \mid \det M = 1\}.$$

  Z 1. věty o iso plyne, že $GL_n(T)/SL_n(T) \cong T^*$.

Druhá věta o isomorfismu, aneb $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Tvrzení 6.3
Buď G grupa a $N \trianglelefteq G$.

1. Je-li $H \trianglelefteq G$ a H obsahuje N, pak $H/N \trianglelefteq G/N$.
2. Každá normální grupa G/N se dá zapsat jako H/N pro $H \trianglelefteq G$ obsahující N jako výše.
3. Máme-li $N \leq H \trianglelefteq G$, pak $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Důkaz:

1. Všimneme si, že nutně $N \trianglelefteq H$. Je-li pak $gN \in G/N$ a $aN \in H/N$, pak
$$(gN)(aN)(gN)^{-1} = (gag^{-1})N \in H/N.$$
2. Je-li $K \trianglelefteq G/N$, vezmeme $H = \{a \in G \mid aN \in K\}$.
3. Uvažujeme homomorfismus $\pi \colon G/N \to G/H$ daný předpisem $\pi(gN) = gH$. Pak $\mathrm{Ker}(\pi) = H/N$ a požadované plyne z 1. věty o iso.

Spojování podgrup

- Obecná otázka: Je-li G grupa a H, N podgrupy, jak vypadá nejmenší podgrupa G obsahující H i N?
- Je-li navíc N normální, pak je to jednoduše

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}.$$

- Máme-li totiž $h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN$, pak

$$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = (h_1 h_2)(h_2^{-1} n_1 h_2) n_2 \in HN$$

  a podobně pro $hn \in HN$ je
  $(hn)^{-1} = n^{-1} h^{-1} = h^{-1}(hn^{-1}h^{-1}) \in HN$.
- Ve svazu podgrup G máme tedy pak

$$\begin{tikzcd}
 & HN & \\
H \arrow[ur] & & N \arrow[ul] \\
 & H \cap N \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Třetí věta o isomorfismu

- Je-li $H \leq G$ a $N \trianglelefteq G$, ve svazu podgrup G máme

$$\begin{tikzcd} & HN & \\ H \arrow[ur] & & N \arrow[ul, "\trianglelefteq"'] \\ & H \cap N \arrow[ul, "\trianglelefteq"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- Pozorování: $N \trianglelefteq HN$ a $H \cap N \trianglelefteq H$. Např. pro $a \in H \cap N$ a $h \in H$ je $hah^{-1} \in H \cap N$.

Tvrzení 6.4
Buď G grupa, $H \leq G$ a $N \trianglelefteq G$. Pak $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

Důkaz:

- Uvažujeme homomorfismus grup $\varphi\colon H \to G/N$ daný předpisem $\varphi(h) = hN$.
- Pak $\operatorname{Im}(\varphi) = HN$ a $\operatorname{Ker}(\varphi) = H \cap N$. Použijeme 1. větu o iso.

Řešitelné grupy – k čemu jsou

- Řešitelné podgrupy jsou technický pojem, který se objevuje v Galoisově větě.
- Je-li T těleso char. 0 a $f \in T[x]$ nekonstantní, NPJE:
  1. Polynom f je řešitelný v radikálech, tj. každý kořen f se dá vyjádřit z koeficientů pomocí $+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1$ a $\sqrt[n]{\ }$. Např. je-li $f = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, pak $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$.
  2. Galoisova grupa $\mathbf{Gal}(f)$ polynomu f je řešitelná.
- Buď $S \geq T$ rozkladové nadtěleso polynomu f, tj. $f || (x - u_1) \cdots (x - u_d)$ v $S[x]$ a zároveň $S = T(u_1, \ldots, u_d)$.
- Pak Galoisovu grupu polynomu f definujeme jako

$$\mathbf{Gal}(f) := \{\psi \colon S \xrightarrow{\cong} S \mid \psi(t) = t \ \forall t \in T\}.$$

- Např. pro $f := x^2 + 1 \in Q[x]$ je $S = \mathbb{Q}(i)$ a $\mathbf{Gal}(f) = \{1_S, \overline{(-)}\} \cong \mathbb{Z}_2$, kde $\overline{a + bi} = a - bi$.
- Obecně je $\mathbf{Gal}(f)$ isomorfní podgrupě permutační grupy $S_{\deg f}$.

Řešitelné grupy – definice

Definice
Grupa G se nazývá řešitelná, pokud existuje řetězec normálních podgrup

$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k = G$$

takový, že každá faktorgrupa N_i / N_{i-1}, $1 \leq i \leq k$, je abelovská.

V tom případě se nejmenšímu možnému takovému k říká stupeň řešitelnosti G.

Poznámky

1. G je řešitelná stupně 1, právě když je G abelovská.
2. Grupy stupně řešitelnosti 2 se nazývají metabelovské.

Příklady

- Dihedrální grupy D_{2n} (symetrie pravidelného n-úhelníku) jsou metabelovské:

$$\{1\} \leq \{\text{rotace}\} \leq D_{2n}.$$

- S_3 je metabelovská:

$$\{(1)\} \leq \{(1), (123), (132)\} \leq S_3.$$

- S_4 je řešitelná stupně 3:

$$\{(1)\} \leq \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq A_4 \leq S_4.$$

- Je-li $n \geq 5$, pak jediné normální podgrupy S_n jsou $\{1\}$, A_n a S_n (text o grupách, str. 27/28). Speciálně není S_n pro $n \geq 5$ řešitelná.

Vlastnosti řešitelných grup

Věta 6.6
Buď G grupa.

1. Je-li G řešitelná a H její pogrupa, pak je H řešitelná.
2. Je-li G řešitelná a N její normální podgrupa, pak je G/N řešitelná.
3. Pokud G obsahuje normální podgrupu N takovou, že jsou N i G/N řešitelné, pak je G řešitelná.

Důsledek 6.7
Buď G grupa a $N_0, \dots, N_k \trianglelefteq G$ takové, že

$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_k = G$$

a každá faktorgrupa N_i/N_{i-1}, $1 \leq i \leq k$, je řešitelná. Pak je G řešitelná.