

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 28. 5. 2020

**Jméno:**

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Uvažujte grupu  $G = A_4$  a podgrupu  $H = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ .
  - (a) Vypište rozkladové třídy  $G$  podle  $H$ .
  - (b) Je tato podgrupa normální? Pokud ne, najděte levou a pravou rozkladovou třídu stejného prvku, které nejsou totožné.

**2.** (15 bodů) Uvažujte polynom  $f = x^3 - 2x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ . Nejprve ověřte, že nemá v  $\mathbb{C}$  násobné kořeny. Označme tři jeho kořeny  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$  a určete hodnotu součinu  $\prod_{i < j} (u_i + u_j)$ .

**Jméno:**

**3.** (15 bodů) Dětská stavebnice obsahuje 16 průhledných čtvercových kostiček, na kterých je namalovaný uprostřed smajlík (symetrický podle svislé osy). Kolika způsoby lze kostičky sestavit do čtverce  $4 \times 4$ , přičemž dvě sestavy považujeme za totožné, pokud lze jednu z druhé dostat otočením a převrácením? Nemusíte dopočítat přesné číslo, stačí ve formě součtu jistých mocnin.

4. (20 bodů) Kolik podgrup má grupa  $\mathbb{Z}_{31}^*$ ? Kolik existuje homomorfismů  $\mathbb{Z}_{31}^* \rightarrow \mathbb{Z}_n$  v závislosti na  $n$  (uvažujte pro jednoduchost pouze  $n$  liché)? Jak velké mají tyto homomorfismy jádra? Uveďte všechny věty, které používáte.

**Jméno:**

**5.** (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu  $f = x^4 - 3$  nad  $\mathbb{Q}$ . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa  $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$  a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese  $f$ ). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?