

ALGEBRA 2 (NMAG 202) – TEST 10. 7. 2020

**Jméno:**

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech. Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (15 bodů) Definujte pojem kongruence na grupě a bez důkazu vysvětlete vztah k normálním podgrupám. Popište nejmenší kongruenci

(a) na grupě  $S_4$  takovou, že  $(1\ 2) \sim (3\ 4)$ , a

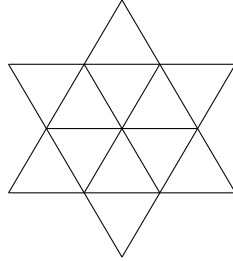
(b) na grupě  $D_{16}$  takovou, že otočení o  $+45^\circ$  a  $-45^\circ$  jsou kongruentní.

Kolik prvků má v každém z případů faktorgrupa?

**2.** (15 bodů) Uvažujte polynom  $f = x^3 - 2x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ . Nejprve ověřte, že nemá v  $\mathbb{C}$  násobné kořeny. Označme tři jeho kořeny  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$  a určete hodnotu výrazu  $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$ .

**Jméno:**

**3.** (15 bodů) Kolika způsoby lze z osmi bílých a čtyřech červených trojúhelníkových destiček sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu jako na obrázku níže? Stačí číselný výraz, nemusíte dopočítávat jeho hodnotu. Dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením.



4. (20 bodů) Buď  $G$  grupa.

- (a) Dokažte, že konjugaci lze interpretovat jako působení grupy na své vlastní nosné množině. Formálně, je dána grupa  $G$  a prvek  $g$  působí na  $x \in G$  jako  $g(x) = \varphi_g(x) = gxg^{-1}$ . Vaším úkolem je ověřit, že to je doopravdy působení.
- (b) Uvažujte toto působení pro grupu  $A_4$ . Kolik je orbit? Z každé zvolte jeden prvek a popište jeho stabilizátor.
- (c) Jak přesně souvisejí stabilizátory různých prvků ve stejné orbitě (zdůvodněte)?

**Jméno:**

**5.** (20 bodů) Určete stupeň rozkladového nadtělesa polynomu  $f = x^5 + 1$  nad  $\mathbb{Q}$ . Určete, kolik prvků má Galoisova grupa  $\mathbf{Gal}(f/\mathbb{Q})$  a popište její jednotlivé prvky (tj. jak působí na rozkladovém nadtělese  $f$ ). Je tato grupa abelovská? Je řešitelná?