INVERZNÍ MATICE - POKRAČOVÁNÍ

- PŘIPOMENUTÍ

1. TVRZENÍ 4.67 ŘÍKÁ, ŽE NPJE:
   - MATICE A JE ZPRAVA INVERTOVATELNÁ,
   - $f_A : T^n \longrightarrow T^m$ JE NA,
   - $\mathrm{rank}(A) = m$ $(= \#$ ŘÁDKŮ$)$.
2. JE-LI A ČTVERCOVÁ A ZPRAVA INVERTOVATELNÁ, PAK JE INVERTOVATELNÁ A MÁME

$$(A \mid I_n) \sim (E_1 A \mid E_1) \sim \overset{\text{EŘÚ}}{\ldots} \sim (E_k \cdots E_1 A \mid E_k \cdots E_1) = (I_n \mid A^{-1})$$

II. ČTVERCOVÉ MATICE POPRVÉ - POKRAČOVÁNÍ

- T 4.73: BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T. PAK NPJE:
  1) A JE INVERTOVATELNÁ ZPRAVA
  2) A JE INVERTOVATELNÁ ZLEVA
  3) A JE INVERTOVATELNÁ

- Dk: 1) $\Rightarrow$ 3): BYLO MINULE NA KONCI

  3) $\Rightarrow$ 2): TRIVIÁLNÍ

  2) $\Rightarrow$ 1): - PŘEDPOKLAD: $\exists Y : YA = I_n$

  $\Rightarrow A^T \cdot Y^T = (Y \cdot A)^T = I_n^T = I_n$, ČILI A^T JE INVERTOVATELNÁ ZPRAVA

  - Z 1) $\Rightarrow$ 3) JE A^T INVERTOVATELNÁ A $Y^T \cdot A^T = I_n \overset{(\cdot)^T}{\rightsquigarrow} A \cdot Y = I_n$

  POUŽIJEME NA A^T

III. INVERZE ZLEVA

- JAK NAJDEME/ROZHODNEME EXISTENCI INVERZE ZLEVA?
  - ↗ MATICI TRANSPONUJEME A HLEDÁME INVERZI ZPRAVA
  - ↘ POUŽIJEME ERÚ PODOBNĚ JAKO U ČTVERCOVÝCH MATIC:

$$A \sim \overset{ERÚ}{\cdots} \sim \underbrace{E_q \cdots E_1}_{E} A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline O_{m-n,n} \end{array}\right)$$

- PŘ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{R}$

  - CHCEME: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \overset{ERÚ}{\cdots} \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

  - BUDEME POČÍTAT

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

- TJ.:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} I_2 \\ \hline O_{1,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} Y \\ \hline Z \end{array}\right) \cdot A = \left(\begin{array}{c} Y \cdot A \\ \hline Z A \end{array}\right), \quad \text{TJ. } I_2 = Y \cdot A \quad (\text{A } O_{1,2} = Z \cdot A)$$

- **T4.70:** BUĎ A MATICE TYPU $m \times m$ NAD T. PAK NPJE:
(= NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY JSOU EKVIVALENTNÍ)

(1) A JE INVERTOVATELNÁ ZLEVA.

(2) $f_A : T^m \to T^m$ JE PROSTÉ ($\Leftrightarrow$ $A \cdot x = b$ MÁ NEJVÝŠE JEDNO ŘEŠENÍ $\forall b \in T^m$).

(3) $Ax = 0$ MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ $x = 0$.

PRAKTICKÉ NA OVĚŘENÍ → (4) MATICE C VZNIKLÁ Z A GAUSSOVOU ELIMINACÍ MÁ VŠECHNY SLOUPCE BÁZOVÉ.

ELEGANTNÍ → (5) $\operatorname{rank}(A) = m$ (= #SLOUPCŮ)

- **Dk:** (1) $\Rightarrow$ (2): PŘEDPOKLAD: $\exists Y : YA = I_m$

- VEZMĚME $x, y \in T^m$ TAKOVÉ, ŽE $\underbrace{f_A(x)}_{A \cdot x} = \underbrace{f_A(y)}_{A \cdot y}$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{Y \cdot A}_{I_m} \cdot x = \underbrace{Y \cdot A}_{I_m} \cdot y = y$$

---

(2) $\Rightarrow$ (3): JEDNODUCHÁ, (3) JE SPECIÁLNÍ PŘÍPAD (2).

---

(3) $\Rightarrow$ (4): UKÁŽEME EKVIVALENTNÍ IMPLIKACI $\neg(4) \Rightarrow \neg(3)$

- PŘEDPOKLAD: C MÁ i-TÝ SLOUPEC VOLNÝ ($\neg(4)$), $C = $

$\Rightarrow$ $C \cdot x = 0$ MÁ ŘEŠENÍ $x = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\!\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ i \\ \\ \end{array}$, $A \cdot x = 0$ MÁ TOTÉŽ NENULOVÉ ŘEŠENÍ, TJ. $\neg(3)$

T4.70: BUĎ A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T. PAK NPJE: = NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY JSOU EKVIVALENTNÍ

(1) A JE INVERTOVATELNÁ ZLEVA.

(2) $f_A : T^n \to T^m$ JE PROSTÉ ($\Leftrightarrow$ $A \cdot x = b$ MÁ NEJVÝŠE JEDNO ŘEŠENÍ $\forall b \in T^m$).

(3) $Ax = 0$ MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ $x = 0$.

PRAKTICKÉ NA OVĚŘENÍ → (4) MATICE C VZNIKLÁ Z A GAUSSOVOU ELIMINACÍ MÁ VŠECHNY SLOUPCE BÁZOVÉ.

ELEGANTNÍ → (5) $\mathrm{rank}(A) = n$ (= #SLOUPCŮ)

DK (POKRAČOVÁNÍ):

(4) ⇒ (1), (5): • AŤ MÁ C VŠECHNY SLOUPCE BÁZOVÉ:

$$A \overset{\text{ERŮ}}{\sim \cdots} \sim \begin{pmatrix} \ddots \\ 0 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} D \\ \hline 0 \end{pmatrix},$$

D ČTVERCOVÁ ŘÁDU n, HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ, NA DIAGONÁLE NEJSOU NULY (SPECIÁLNĚ $m \geq n$) → ODSUD PLYNE (5)

NAVÍC ALGORITMUS PRO VÝPOČET LEVÉ INVERZE

• $A \sim \cdots \sim E_\ell \cdots E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} D \\ \hline 0 \end{pmatrix} \overset{\text{ERŮ}}{\sim \cdots} \sim \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{ERŮ}}{\sim \cdots} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ \hline O_{m-n,n} \end{pmatrix} = \underbrace{E_\ell \cdots E_1}_{E} \cdot A = E \cdot A$

• ROZEPÍŠEME $E = \begin{pmatrix} Y \\ \hline Z \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}$

• $\begin{pmatrix} I_n \\ \hline O_{m-n,n} \end{pmatrix} = E \cdot A = \begin{pmatrix} Y \\ \hline Z \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} Y \cdot A \\ \hline Z \cdot A \end{pmatrix}$, TJ. $\boxed{I_n = Y \cdot A}$ → ODSUD PLYNE (1)

---

(5) ⇒ (4): NECHÁM NA ROZMYŠLENÍ

IV. REGULÁRNÍ MATICE (ANEB ČTVERCOVÉ MATICE PODRUHÉ)

– **DEF:** MATICE A NAD T JE **REGULÁRNÍ**, POKUD $f_A : T^n \to T^m$ BIJEKCE.

(Z T4.67 & 4.70: TOTÉŽ, ŽE A JE INVERTOVATELNÁ A NUTNĚ PAK $n = m$).

– **V 4.81 (+T4.88):** BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n NAD T. PAK NPJE:

OBSAH V4.81, VŠE PLYNE Z ÚVAH KOLEM TVRZENÍ 4.67, 4.70, 4.73

(1) A JE REGULÁRNÍ.
(2) $f_A : T^n \to T^n$ JE NA.
(3) $f_A : T^n \to T^n$ JE PROSTÉ.
(4) SOUSTAVA $A \cdot x = 0$ MÁ JEDINÉ ŘEŠENÍ $x = 0$ $(\in T^n)$.
(5) GAUSSOVOU ELIMINACÍ DOSTANEME Z A HORNÍ TROJÚHELNÍKOVOU MATICI, KTERÁ NEMÁ NA DIAGONÁLE NULY.
(6) MATICI A LZE PŘEVÉST EŘÚ NA I_n
(7) A JE INVERTOVATELNÁ
(8) $\exists X : \quad A \cdot X = I_n$
(9) $\exists Y : \quad Y \cdot A = I_n$
(10) $\mathrm{rank}(A) = n$ (= ŘÁD MATICE A)

OBSAHEM T4.88

(11) A JE SOUČINEM ELEMENTÁRNÍCH MATIC

V. INVERZNÍ MATICE K HORNÍM & DOLNÍM TROJÚHELNÍKOVÝM MATICÍM:

– PŘ:

$$\begin{array}{c} \\ -4 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -5 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot -$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -1 & 1/3 \end{array}\right)$$

▮ = PIVOTI

- $(A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|A^{-1}|$

TJ. ČTVERCOVÁ

– T 4.98: BUĎ A DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE S NENULOVÝMI PRVKY NA DIAGONÁLE. PAK A JE REGULÁRNÍ A A^{-1} JE DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ. MĚLA-LI A NA DIAGONÁLE SAMÉ 1, PAK A^{-1} JE MÁ TAKÉ. PODOBNĚ PRO HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE.