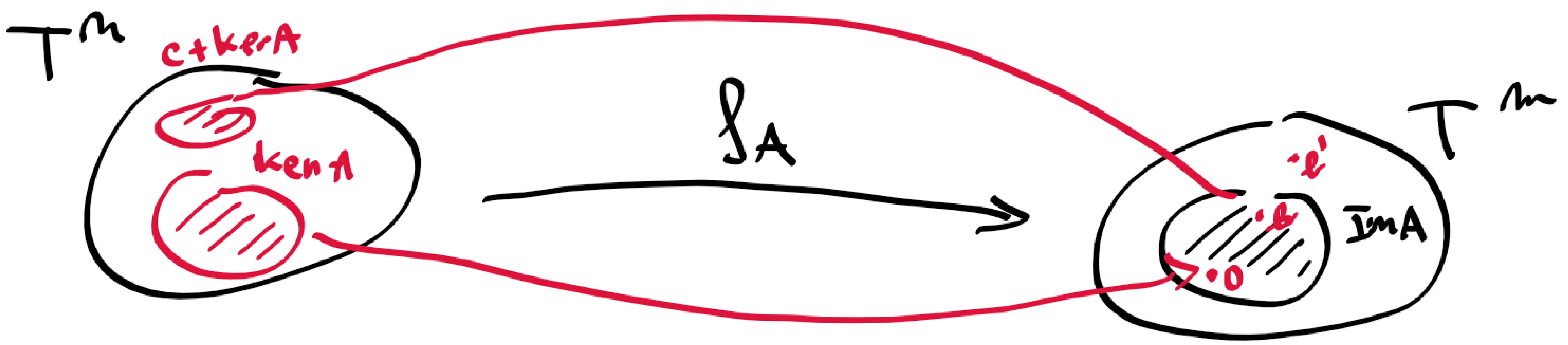
- ORGANIZAČNÍ POZNÁMKY:
  - NENÍ DĚKANSKÝ SPORTOVNÍ DEN, ZATO JSOU CVIČENÍ A PŘEDNÁŠKA (ČT 12.11.)
  - 1. MIDTERM: INFO NAPŘ. V MOODLU (TÝDEN OD 23.11.)!

- T TĚLESO, A MATICE TYPU $m \times n$ $\quad m\,\boxed{A}_{\,n}$ $\quad$) $f_A : T^n \to T^m$, $x \mapsto A\cdot x$

- S MATICÍ A JSOU SPOJENY 4 VEKTOROVÉ PROSTORY:

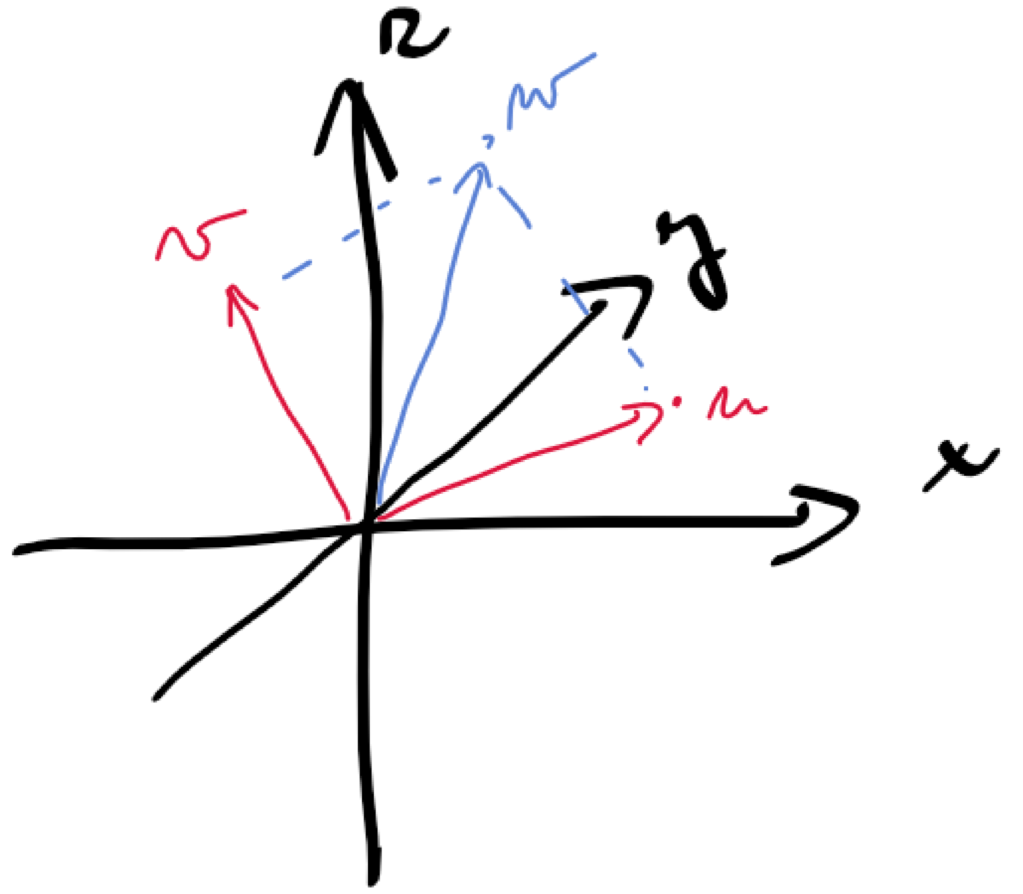
$\operatorname{Ker} A = \{x \in T^n : A\cdot x = 0\} = \{x \in T^n : f_A(x) = 0\}$	$\operatorname{Im} A = LO\{\overbrace{a_1, \dots, a_n}^{\text{SLOUPCE } A}\} \leq T^m = f_A(T^n) = \operatorname{Im} f_A$
$\ker A^T$	$\operatorname{Im} A^T = LO\{\text{ŘÁDKY } A\} \leq T^n$



C ... JEDNO ŘEŠENÍ SLR $Ax=b$

– SLOUPCOVÝ PROSTOR MATICE A A GEOMETRIE:

$T = \mathbb{R}$



$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = u + v$

+1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1{,}5 & 3 \end{pmatrix} = \left(u \,\middle|\, v \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1{,}5 & 3 & 4{,}5 \end{pmatrix} = \left(u \,\middle|\, v \,\middle|\, w \right)$$

$$f_A : T^2 \longrightarrow T^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot u + x_2 \cdot v = f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

– OBECNĚ: A TYPU $m \times n$ NAD T, $A = \left(a_1 \,\middle|\, a_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_n \right)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$,

PAK $f_A(x) = A \cdot x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$

$(\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Im}\, f_B = \mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Im}\, A)$

– TJ. OBRAZ f_A JE PŘESNĚ $\mathrm{LO}\{a_1, \dots, a_n\}$.

- T5.32 PO ČÁSTECH (PROSTORY SPOJENÉ S MATICÍ A ELEM. ÚPRAVY)

- A TYPU $m \times n$ NAD T
- T4.88: POSLOUPNOST ERÚ: $A \sim \dots \sim R \cdot A$, R REGULÁRNÍ ŘÁDU m
  POSLOUPNOST ELEM. SLOUPCOVÝCH ÚPRAV: $A \sim \dots \sim A \cdot Q$
  Q REGULÁRNÍ ŘÁDU n

- **ROVNOST Č.2:** $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} R \cdot A$.

$$\begin{tikzcd} T^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_{RA}\ (= f_R \circ f_A)"'] & T^m \arrow[r, "f_R", "\text{BIJEKCE}"'] & T^m \end{tikzcd}$$

- Dk:
  - $x \in \operatorname{Ker} A \iff Ax = 0 \Rightarrow R \cdot A \cdot x = 0$
    $\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} RA$
  - $x \in \operatorname{Ker} RA \iff RAx = 0 \Rightarrow \underbrace{R^{-1}R}_{I_m} A x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A$

- **ROVNOST Č.3:** $\operatorname{Im} A \cdot Q = \operatorname{Im} A$ (VE SKRIPTECH $\operatorname{Im} A^T R^T = \operatorname{Im} (RA)^T = \operatorname{Im} A^T$)

$$\begin{tikzcd} T^n \arrow[r, "f_Q", "\text{BIJEKCE}"'] \arrow[rr, bend right, "f_{AQ}\ (= f_A \circ f_Q)"'] & T^n \arrow[r, "f_A"] & T^m \end{tikzcd}$$

- Dk:
  - $y \in \operatorname{Im} A \iff \exists x : Ax = y$
    $\Rightarrow A \cdot Q \cdot (Q^{-1} \cdot x) = y$
    $\Rightarrow y \in \operatorname{Im}(AQ)$
  - $y \in \operatorname{Im} AQ \iff \exists x : AQx = y \Rightarrow A \cdot (Qx) = y \Rightarrow y \in \operatorname{Im}(A)$

ROVNOST Č. 1: BUĎ $A = (a_1 | \dots | a_n)$, R REGULÁRNÍ.

PAK $\mathrm{Im}\, RA = LO\{Ra_1, \dots, Ra_n\}$

$$\begin{tikzcd} T^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_{RA}\ (= f_R \circ f_A)"'] & T^m \arrow[r, "f_R", "\text{BIJEKCE}"'] & T^m \end{tikzcd}$$

$$a_1, \dots, a_n$$

Dk: PŘÍMO Z MATICOVÉHO NÁSOBENÍ!

$$\underbrace{R \left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)}_{\substack{\text{TOHOTO TVARU JSOU} \\ \text{PŘESNĚ PRVKY } \mathrm{Im}\, RA}} = R \cdot (x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n \cdot a_n) = R \cdot (x_1 \cdot a_1) + \dots + R(x_n \cdot a_n)$$

$$= \underbrace{x_1 \cdot Ra_1 + x_2 Ra_2 + \dots + x_n \cdot Ra_n}_{\substack{\text{TOTO JSOU PŘESNĚ} \\ \text{PRVKY } LO\{Ra_1, \dots, Ra_n\}}}$$

LINEÁRNÍ (NE)ZÁVISLOST

– DEF: BUĎ V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T A $(v_1, \dots, v_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ. ŘEKNEME, ŽE POSLOUPNOST JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ, POKUD ŽÁDNÝ VEKTOR v_i Z POSLOUPNOSTI NELZE VYJÁDŘIT JAKO LINEÁRNÍ KOMBINACE ZBÝVAJÍCÍCH. TJ. NEPLATÍ

$$v_i = t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

PRO ŽÁDNÉ $1 \leq i \leq k$ A PRO ŽÁDNÉ $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k \in T$.

EKVIVALENTNĚ LZE PSÁT:

$$\forall 1 \leq i \leq k : \quad v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$$

V OPAČNÉM PŘÍPADĚ JE POSLOUPNOST LINEÁRNĚ ZÁVISLÁ.

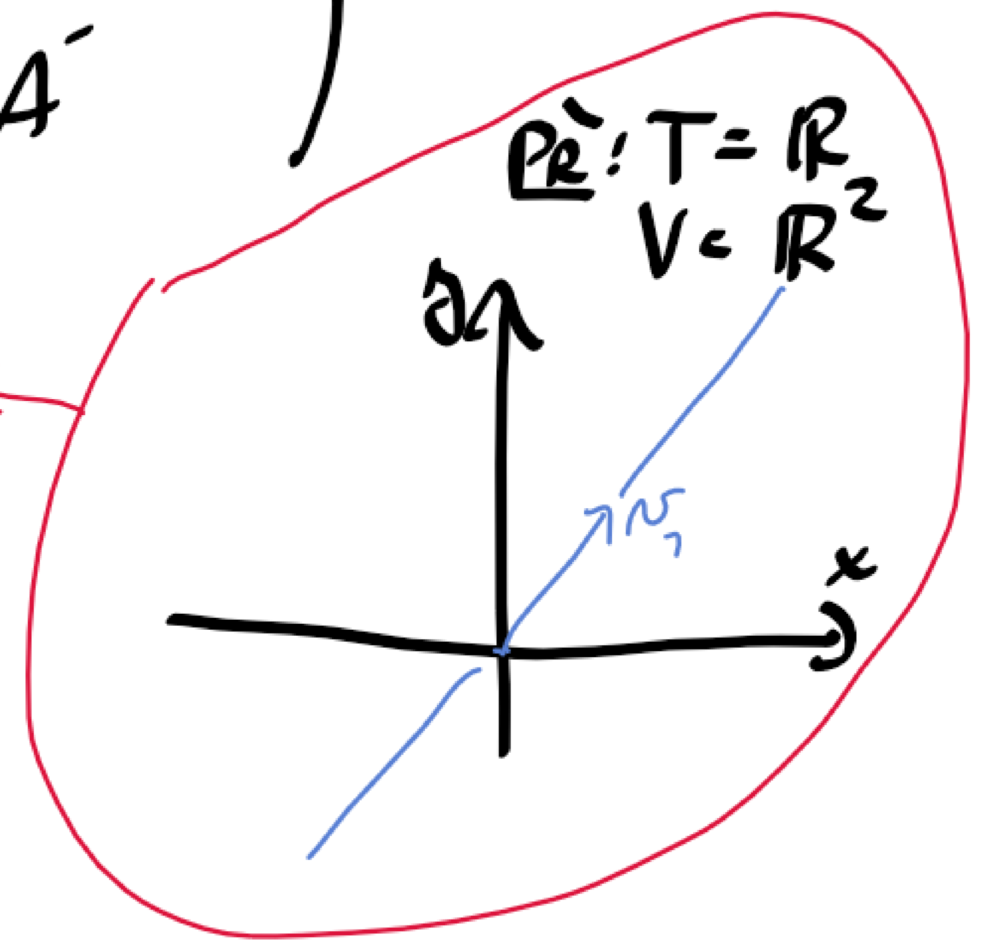
– LINEÁRNÍ ZÁVISLOST / NEZÁVISLOST $(v_1, \dots, v_k)$ SE NEZMĚNÍ PERMUTACÍ VEKTORŮ

– SNADNÉ PŘÍPADY

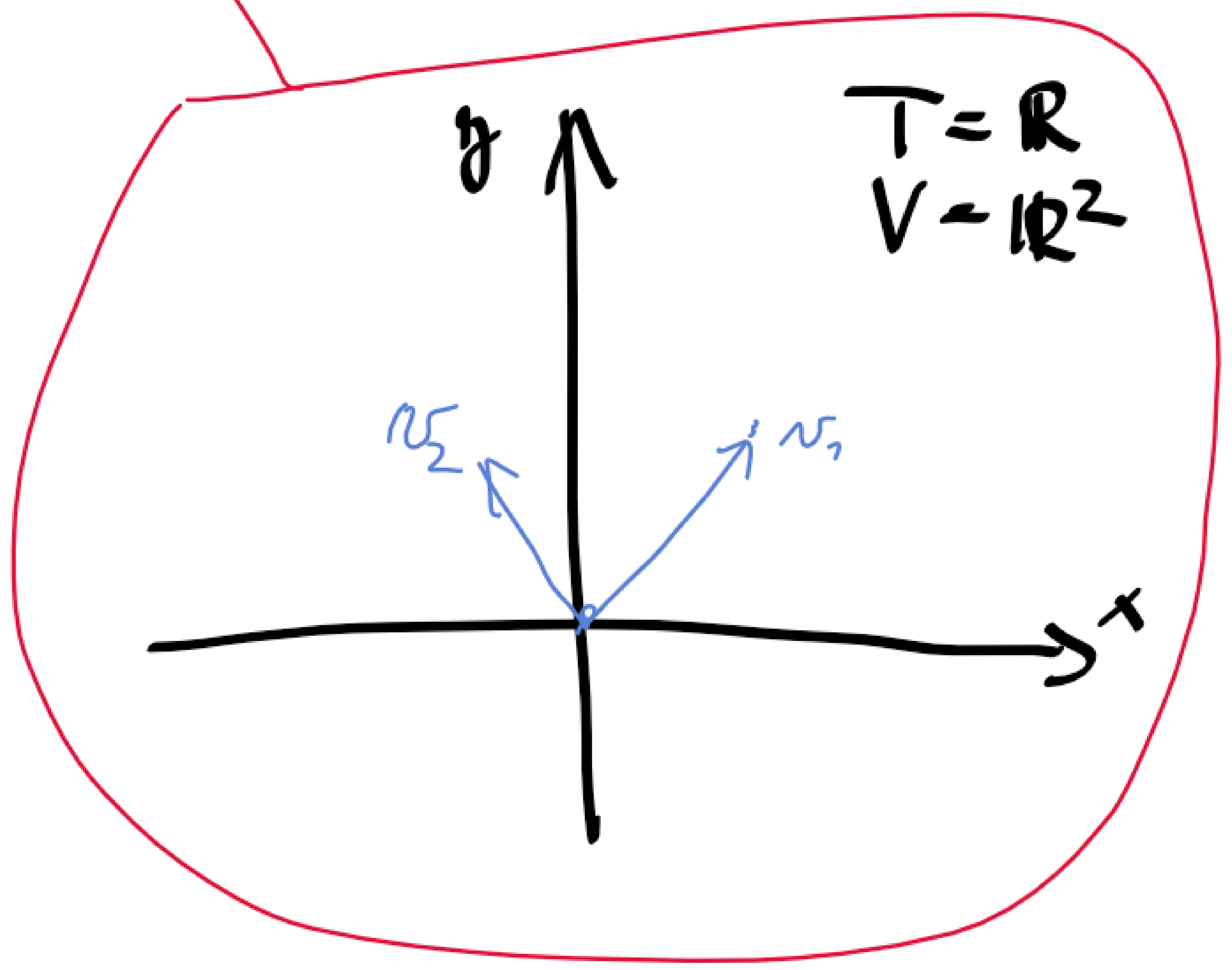
(ZKRATKY: LN = LIN. NEZÁVISLÁ
LZ = LIN. ZÁVISLÁ)

0) $k=0$ ... LN (DEF.)

1) $k=1$ ... POSLOUPNOST (v_1) JE LN $\iff$ $v_1 \neq 0$



2) $k=2$ ... POSLOUPNOST (v_1, v_2) $\iff$ $v_1 \neq 0$ & $v_2 \neq 0$ &
$v_1 \neq t \cdot v_2$ PRO ŽÁDNÉ $t \in T$



3) PODPOSLOUPNOST LN POSLOUPNOSTI JE LN.

4) POSLOUPNOST $(v_1, \dots, v_k)$ JE VŽDY LZ, POKUD

- NĚJAKÉ $v_i = 0$ NEBO
- $v_i = v_j$ PRO NĚJAKÁ $i \neq j$

5) NAPŘ. $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right)$ Z $\mathbb{R}^2$ JE LZ
(NENÍ ANI JEDEN PŘÍPAD ZE 4))

- T5.36: V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T, $(v_1, \dots, v_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ
PAK NPJE:

(1) $(v_1, \dots, v_k)$ JE LN

(2) $\forall 1 \leq i \leq k$: $v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$

(3) NULOVÝ VEKTOR LZE VYJÁDŘIT JAKOŽTO LINEÁRNÍ KOMBINACI $o = t_1 \cdot v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k \cdot v_k$ $(t_1, \dots, t_k \in T)$ POUZE TRIVIÁLNĚ, TJ. $t_1, \dots, t_k = 0$.

(4) MÁME-LI $b \in T^m$, PAK EXISTUJE NEJVÝŠE 1 k-TICE $(t_1, \dots, t_k)$ PRVKŮ T TAKOVÁ, ŽE

$$b = t_1 v_1 + \dots + t_k \cdot v_k$$

- K ČEMU JE TO DOBRÉ?
- POKUD $v_1, \dots, v_k \in V = T^m$, $A = (v_1 | \dots | v_k)$, PAK (3) ŘÍKÁ PŘESNĚ, ŽE $\operatorname{Ker} A = \{o\}$
- VZPOMEŇTE SI NA T4.70! ($\operatorname{Ker} A = \{o\} \Leftrightarrow A$ ZLEVA INVERTIBILNÍ)

- **POZN**: DEFINICE LN $(v_1, \dots, v_k)$ VERSUS T5.36 (2):

  - DEFINICE: $\forall\, 1 \le i \le k: \quad v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$
  - T5.36(2): $\forall\, 1 \le i \le k: \quad v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$

- **POZN**: BUDE POZDĚJI:

$$\left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}_{n}\right\} m \quad , \quad n > m \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \text{ JE LZ}$$