LINEÁRNÍ (NE)ZÁVISLOST

- **T5.36:** V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T, $(v_1, \dots, v_k)$ POSLOUPNOST VEKTORŮ

PAK NPJE:

(1) $(v_1, \dots, v_k)$ JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ, TJ.:

$\forall\, 1 \leq i \leq k: \quad v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$

(2) $\forall\, 1 \leq i \leq k: \quad v_i \notin LO\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$

(3) NULOVÝ VEKTOR LZE VYJÁDŘIT JAKOŽTO LINEÁRNÍ KOMBINACI $0 = t_1 \cdot v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k \cdot v_k \quad (t_1, \dots, t_k \in T)$ POUZE TRIVIÁLNĚ, TJ. $t_1, \dots, t_k = 0$.

(4) MÁME-LI $b \in V$, PAK EXISTUJE NEJVÝŠE 1 k-TICE $(t_1, \dots, t_k)$ PRVKŮ T TAKOVÁ, ŽE

$$b = t_1 v_1 + \dots + t_k \cdot v_k$$

- DK: $(1) \Rightarrow (2)$: TRIVIÁLNÍ

$(2) \Rightarrow (3)$: PŘEDPOKLÁDEJME $\neg(3)$

- TJ. MÁME VYJÁDŘENÍ $\underset{V}{\overset{\shortparallel}{0}} = t_1 \cdot v_1 + \dots + t_i \cdot v_i + \dots + t_k \cdot v_k$

TAKOVÉ, ŽE $t_i \neq 0$ PRO NĚJAKÉ i, $1 \leq i \leq k$

- ZVOLÍME NEJVĚTŠÍ TAKOVÉ i, TJ. $0 = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + \underbrace{t_i}_{\neq 0} \cdot v_i$

$\Rightarrow \quad v_i = (-t_i^{-1} t_1) \cdot v_1 + (-t_i^{-1} t_2) \cdot v_2 + \dots + (-t_i^{-1} t_{i-1}) \cdot v_{i-1}$

$\Rightarrow \quad \neg(2)$

$(3) \Rightarrow (4)$: PŘEDPOKLÁDEJME $\neg(4)$

- TJ. $\exists\, b \in V \;\exists\; (t_1, \dots, t_k) \neq (s_1, \dots, s_k) \in T^k$:

$s_1 \cdot v_1 + s_2 \cdot v_2 + \dots + s_k \cdot v_k = b = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_k \cdot v_k$

$\Rightarrow \quad (s_1 - t_1) \cdot v_1 + (s_2 - t_2) \cdot v_2 + \dots + (s_k - t_k) \cdot v_k = 0$

A ASPOŇ JEDEN KOEFICIENT $(s_i - t_i)$ JE NENULOVÝ, COŽ JE $\neg(3)$

$(4) \Rightarrow (3)$: (3) JE SPECIÁLNÍM PŘÍPADEM PODMÍNKY (4) PRO $b = 0\ (\in V)$

- DK (POKRAČOVÁNÍ):

(3) ⇒ (1): - MÁME $(v_1, \dots, v_k)$ POSLOUPNOST PRVKŮ V

- PŘEDPOKLÁDEJME $\neg(1)$, TJ. POSLOUPNOST JE LZ, TJ. $\exists\, 1 \leq i \leq k$

$\exists\, t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k \in T$: $v_i = t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_{i-1} \cdot v_{i-1} + t_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + t_k \cdot v_k$

- OD OBOU STRAN ODEČTEME v_i A DOSTANEME:

$$0 = t_1 \cdot v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + t_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + t_k \cdot v_k$$

$\Rightarrow \neg(3)$, PROTOŽE KOEFICIENT U v_i JE $\neq 0$.

- PODÍVÁME SE, CO PODMÍNKA (3) Z T5.36 ZNAMENÁ PRO ARITMETICKÉ VEKTORY

- **T5.38**: BUĎ T TĚLESO, $a_1, \dots, a_n \in T^m$ ARITMETICKÉ VEKTORY. VEZMEME MATICI $A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$ TYPU $m \times n$. PAK NTJE:

POČETNĚ OVĚŘITELNÉ!

(1) $(a_1, \dots, a_n)$ JSOU LN

(2) $\ker A = \{0\}$ (VZPOMEŇTE NA T4.70)

(3) MATICE C, KTEROU DOSTANEME Z A GAUSSOVOU ELIMINACÍ, MÁ VŠECHNY SLOUPCE BÁZOVÉ

- **DK**: **(1) ⟺ (2)**: - POUŽIJEME EKVIVALENCI (1) ⟺ (3) Z T5.36

- TJ. $(a_1, \dots, a_n)$ JSOU LN ⟺

$$\Big(\underbrace{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n}_{= A \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}} = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_n = 0 \Big) \Leftrightarrow$$

$\ker A = \{0\}$

---

(2) ⟺ (3): BYLO V T4.70

- **PŘ:** (1) Č. 5.37. ROZHODNĚTE, ZDA JSOU VEKTORY $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ ZE $\mathbb{Z}_3^4$ LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

VEKTORY JSOU LN!

---

(2) Č. 5.39. ROZHODNĚTE, ZDA JSOU VEKTORY

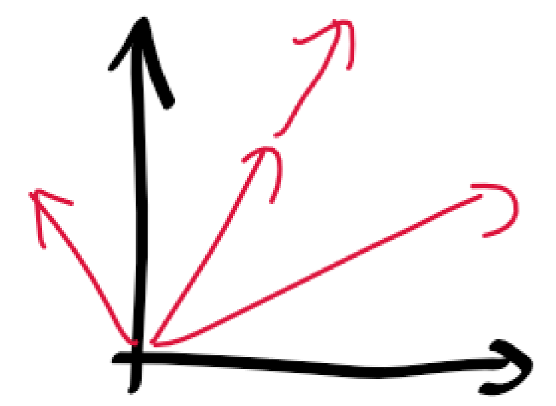
$$\left(\begin{pmatrix}3i+5\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2+i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pi\\e^{\pi}\\4\end{pmatrix}\right)$$

Z $\mathbb{C}^3$ LN.

$$A := \begin{pmatrix} 3i+5 & 5 & 4 & \pi \\ 2 & 2+i & 2 & e^{\pi} \\ 3 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \end{pmatrix}$$

ALE HODNOST A JE < 3, VŠECHNY SLOUPCE NEMOHOU BÝT BÁZOVÉ, ČILI VEKTORY JSOU LZ!

- **ODTUD POZOROVÁNÍ:** MÁME-LI POSLOUPNOST $(a_1, \dots, a_n)$ VEKTORŮ Z T^m A $n > m$, PAK JE POSLOUPNOST LZ!



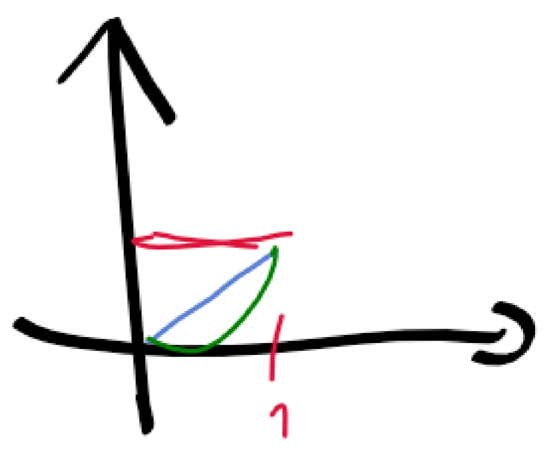
– LZ / LN V OBECNÝCH VP:

• PŘ: 1) $\mathbb{R}$ JSOU PŘIROZENÝM ZPŮSOBEM V.P. NAD $\mathbb{Q}$.

OTÁZKA: JSOU $(1, \sqrt{2})$ LN? JSOU, PROTOŽE $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

JSOU $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ LN? ANO, NA ROZMYŠLENÍ.

• PŘ: 2) $V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ SPOJITÁ} \}$ NAD $\mathbb{R}$.



JSOU $(1, x, x^2, x^3)$ LN?

JSOU $(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x)$ LN?

V OBOU PŘÍPADECH ANO!

- T5.41: VEZMĚME MATICI $A = (a_1|\dots|a_n)$ TYPU $m \times n$ NAD T.
BUĎ R REGULÁRNÍ MATICE ŘÁDU m,
BUĎ Q —— " —— n. PAK NTJE:

(1) SLOUPCE A JSOU LN.
(2) SLOUPCE $R \cdot A$ JSOU LN.
(3) SLOUPCE $A \cdot Q$ JSOU LN.

(A NAVÍC SLOUPCOVÉ PROSTORY A A $A \cdot Q$ JSOU STEJNÉ)

Dk: (1) $\Leftrightarrow$ (2): VIZTE T 5.38 (ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY NEMĚNÍ JÁDRO).

(1) $\Leftrightarrow$ (3): - ŘEKNĚME, ŽE PLATÍ (1), TJ. $\ker A = \{0\}$ PODLE T5.38.

- CO KDYŽ $x \in \ker(A \cdot Q)$?
- PAK: $A(Qx) = 0 \Rightarrow Qx \in \ker A \Rightarrow Q \cdot x = 0 \xRightarrow[\ker Q = \{0\}]{Q \text{ REGUL}} x = 0$
- ČILI $\ker(AQ) = \{0\}$
- PRO DRUHOU IMPLIKACI POUŽIJEME VZTAH $A = (AQ) \cdot Q^{-1}$

T5.43: Buď $A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \hline \tilde{a}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \tilde{a}_m \end{pmatrix}$ matice typu $m \times n$. Pak

řádky A jsou LN, právě když matice C, která vznikne Gaussovou eliminací z A, má všechny řádky $\neq 0$.

(Vzpomeňte na T4.67!)

Dk:
- BÚNO A už je v odstupňovaném tvaru
  (podle T5.41 má A LN řádky $\Leftrightarrow$ C má LN řádky)

Budeme dokazovat toto
- Pak dokazujeme: $A = (\ldots)$ má LN řádky $\Leftrightarrow$ nemá nulové řádky

---

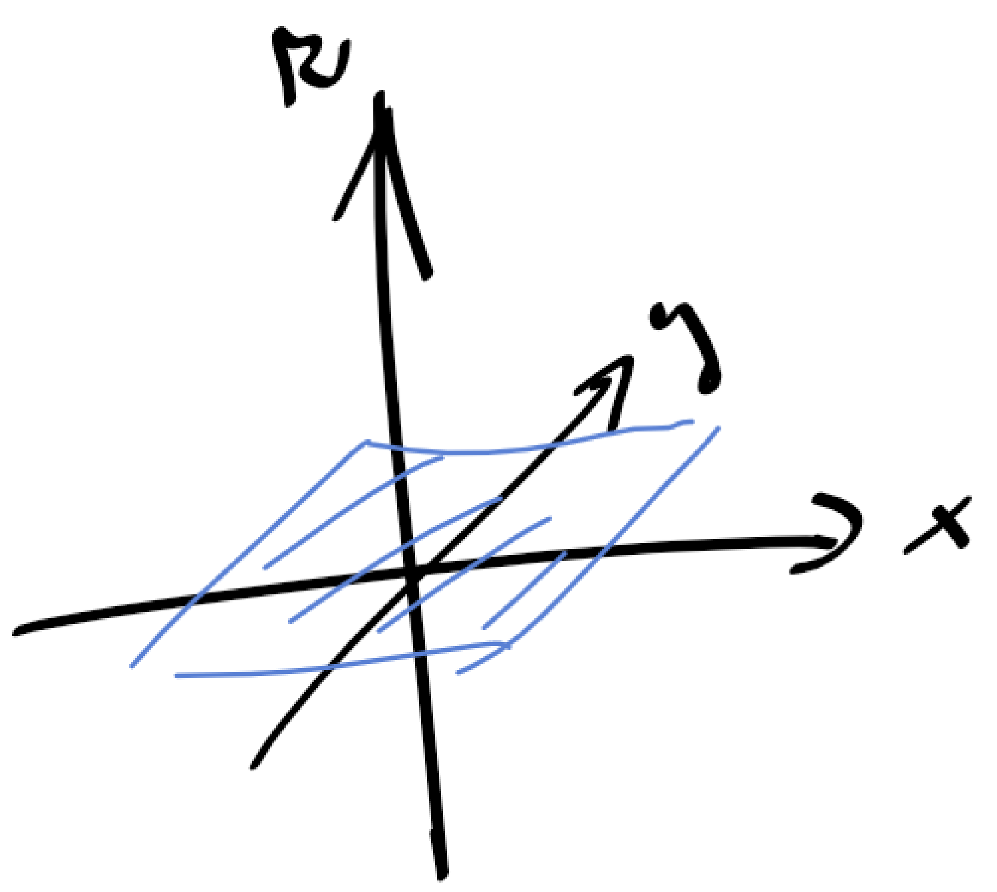
$\Rightarrow$: jasná (posloupnost s nulovým vektorem je LZ!)

$\Leftarrow$: Ať A nemá nulové řádky, $A = (\ldots)$ $\}\, m$

$k_1 < k_2 < \ldots < k_m$

- víme: A má LN řádky $\Leftrightarrow$ $A^T = (\ldots)$ má LN sloupce $\overset{T5.38}{\Longleftrightarrow}$ $(A^T x = 0 \Rightarrow x = 0)$
- vezmě podmatici B matice A^T s řádky $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$: $B = \begin{pmatrix} \bullet & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \bullet \end{pmatrix}$ čtvercová
- B regulární $\Rightarrow$ $\ker B = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\ker A^T = \{0\}$ $\Rightarrow$ A LN řádky.

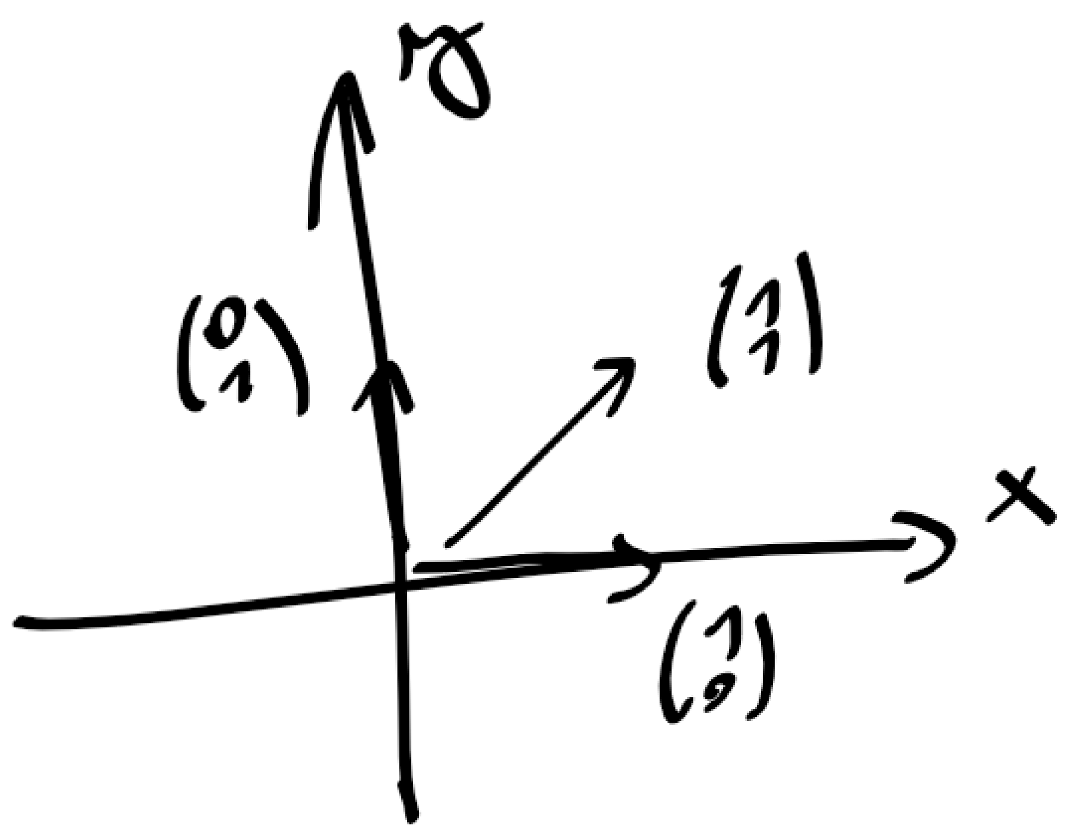
- PŘ: $\mathbb{R}^3 = V$, $T = \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right)$ LZ



$$\mathrm{LO}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}t_1 + t_3\\t_2 + t_3\\0\end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\0\end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$



- <u>DOTAZ</u>: PROČ A INVERT. ZPRAVA (TYPU $n \times n$) $\Longrightarrow$ $f_A: T^n \to T^n$ JE NA?

- <u>PŘEDP.</u>: $\exists Y$ TYPU $n \times n$: $A \cdot Y = I_n$

- VEZMEME $y \in T^n$, HLEDÁME VZOR PŘI f_A.

- STAČÍ VZÍT $x = Y \cdot y \in T^n$, PROTOŽE

$$f_A(x) \overset{\text{DEF.}}{=} A \cdot x = (A \cdot Y) \cdot y = I_n \cdot y = y.$$