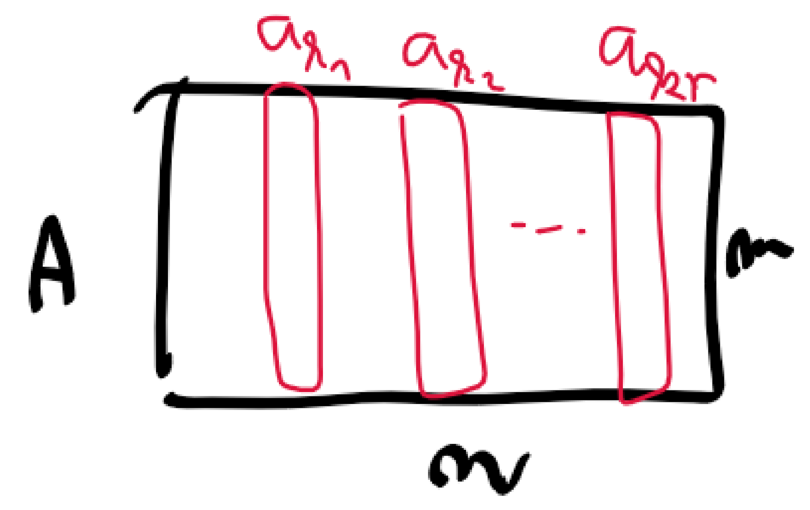
HODNOST MATICE PODRUHÉ

– **PŘIPOMENUTÍ:** UVAŽUJME LIBOVOLNOU MATICI $A = (a_1|a_2|\dots|a_n)$ TYPU $m \times n$ NAD LIBOVOLNÝM TĚLESEM T. PAK PLATÍ:

VIZTE DEF 5.82 $\rightarrow$ (1) SLOUPEC a_k JE BÁZOVÝ $\iff$ $a_k \notin LO\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$.

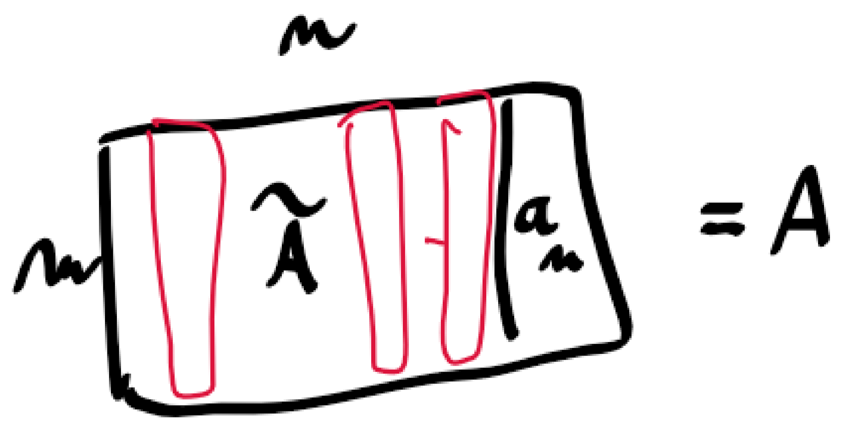
VIZTE DEF. 5.89 A POZOROVÁNÍ 5.83 $\rightarrow$ (2) $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$. ($\operatorname{rank}(A) = \#$ BÁZOVÝCH SLOUPCŮ)

– **POZOROVÁNÍ 5.83:** BÁZOVÉ SLOUPCE $B = (a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_r})$, KDE $r = \operatorname{rank}(A)$, TVOŘÍ BÁZI $\operatorname{Im}(A)$.



TOTIŽ:
- Z (1) VÍME, ŽE $a_{k_i} \notin LO\{a_{k_1}, \dots, a_{k_{i-1}}\}$

  $\Rightarrow$ B JE LN
- UKÁŽEME, ŽE $\operatorname{Im}(A) = LO\{a_{k_1}, \dots, a_{k_r}\}$
- TO SE DÁ UKÁZAT INDUKCÍ PODLE n
- PRO $n = 1$ JEDNODUCHÉ, PRO $n > 1$:



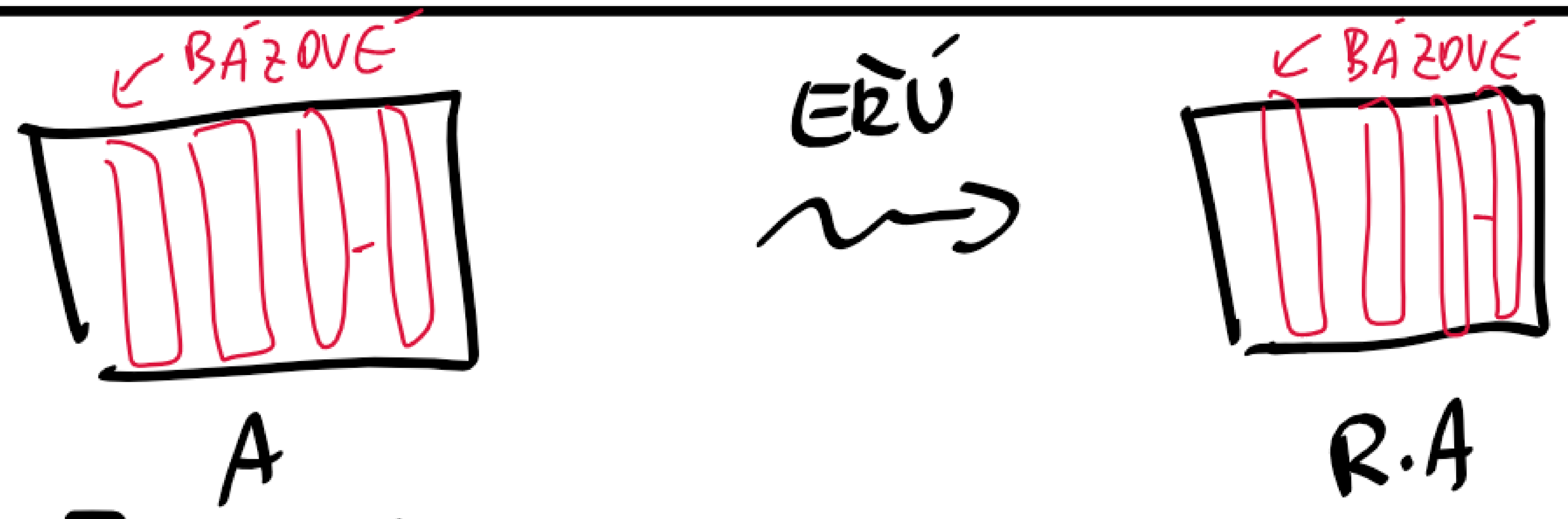
– **POZOROVÁNÍ:** (5.90, 5.93) HODNOST MATICE A SE NEZMĚNÍ ŘÁDKOVÝMI ANI SLOUPCOVÝMI ÚPRAVAMI, TJ: (A TYPU $m \times n$ NAD T)

(1) R REGULÁRNÍ ŘÁDU m, PAK $\operatorname{rank}(R \cdot A) = \operatorname{rank}(A)$.

(2) Q REGULÁRNÍ ŘÁDU n, PAK $\operatorname{rank}(A \cdot Q) = \operatorname{rank}(A)$.

– **K DŮKAZU:**

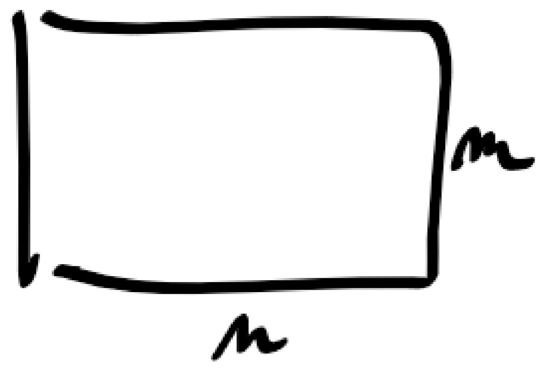
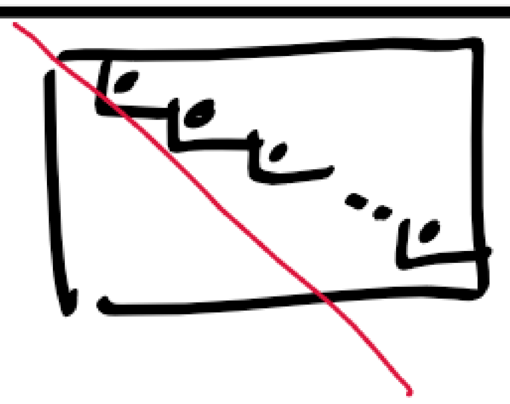
– PRO (1) POUŽIJEME T5.86:



– PRO (2) POUŽIJEME T5.32: $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A \cdot Q)$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)) = \dim(\operatorname{Im}(A \cdot Q)) = \operatorname{rank}(A \cdot Q)$$

- **VS. 88:** A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T. PAK $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$.

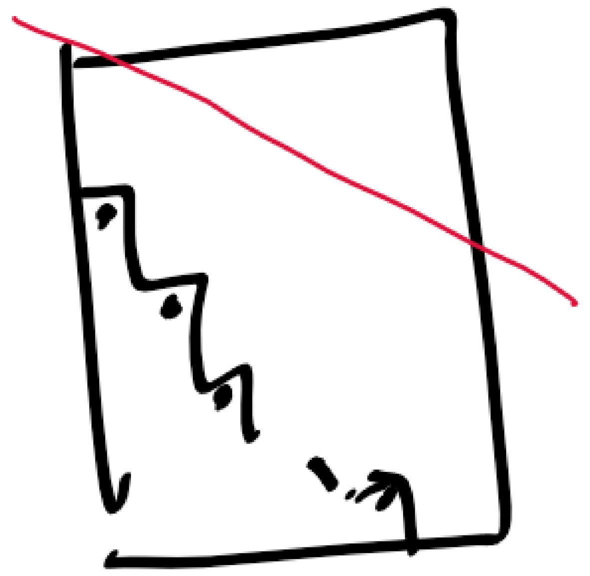
- DK: • $A =$  $\xrightarrow{\text{ERV}}$ $C =$  , R REGULÁRNÍ

$C = R \cdot A$

• $\operatorname{rank}(A) \overset{\text{POZ.}}{=} \operatorname{rank}(R \cdot A) = \operatorname{rank}(C) = \#$ BÁZOVÝCH SLOUPCŮ C

$\|$

• $\operatorname{rank}(A^T) \overset{\text{POZ.}}{=} \operatorname{rank}(A^T \cdot \underbrace{R^T}_{\text{REGULÁRNÍ}}) = \operatorname{rank}(C^T) = \#$ NENULOVÝCH ŘÁDKŮ C

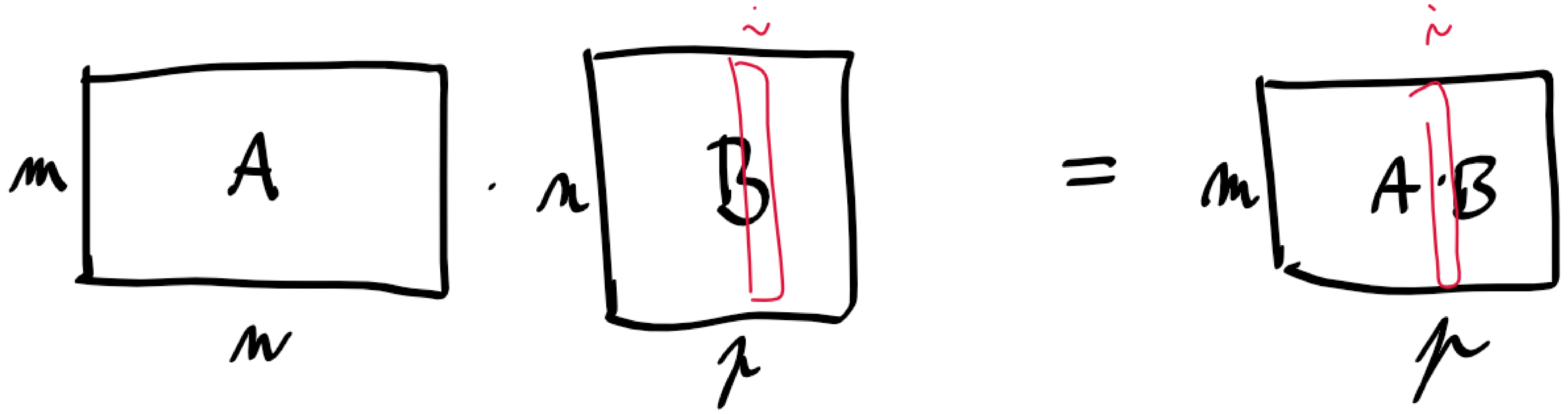
$C^T =$ 

- JAKÝ VZTAH MÁ HODNOST K MATICOVÝM OPERACÍM? KONKRÉTNĚ K NÁSOBENÍ MATIC?

- <u>T5.92</u>: BUĎ A TYPU $m \times n$ A B TYPU $n \times p$. PAK

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

- <u>Dk</u>:



- SLOUPCE $A \cdot B$ JSOU LINEÁRNÍ KOMBINACE SLOUPCŮ A

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im}(A \cdot B) \subseteq \operatorname{Im}(A) \overset{T5.69}{\Longrightarrow} \operatorname{rank}(A \cdot B) \le \operatorname{rank}(A)$$

- DÁLE $\operatorname{rank}(A \cdot B) \overset{V5.88}{=} \operatorname{rank}(B^T \cdot A^T) \le \operatorname{rank}(B^T) \overset{V5.88}{=} \operatorname{rank}(B)$. $\square$

- <u>POZN</u>: $T = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, PAK $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, TJ.

$$0 = \operatorname{rank}(A \cdot B) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\} = 1$$

– POZOROVÁNÍ 5.94 (VARIACE NA 4.81, CHARAKTERIZACE REGULÁRNÍCH MATIC)

BUĎ A ČTVERCOVÁ MATICE ŘÁDU n. PAK NPJE:

(1) A REGULÁRNÍ

(2) $\text{rank}(A) = n$

(3^S) SLOUPCE A JSOU LN

(4^S) SLOUPCE A TVOŘÍ BÁZI T^n

(5^S) SLOUPCE A GENERUJÍ T^n

($3^Ř$) ŘÁDKY A JSOU LN

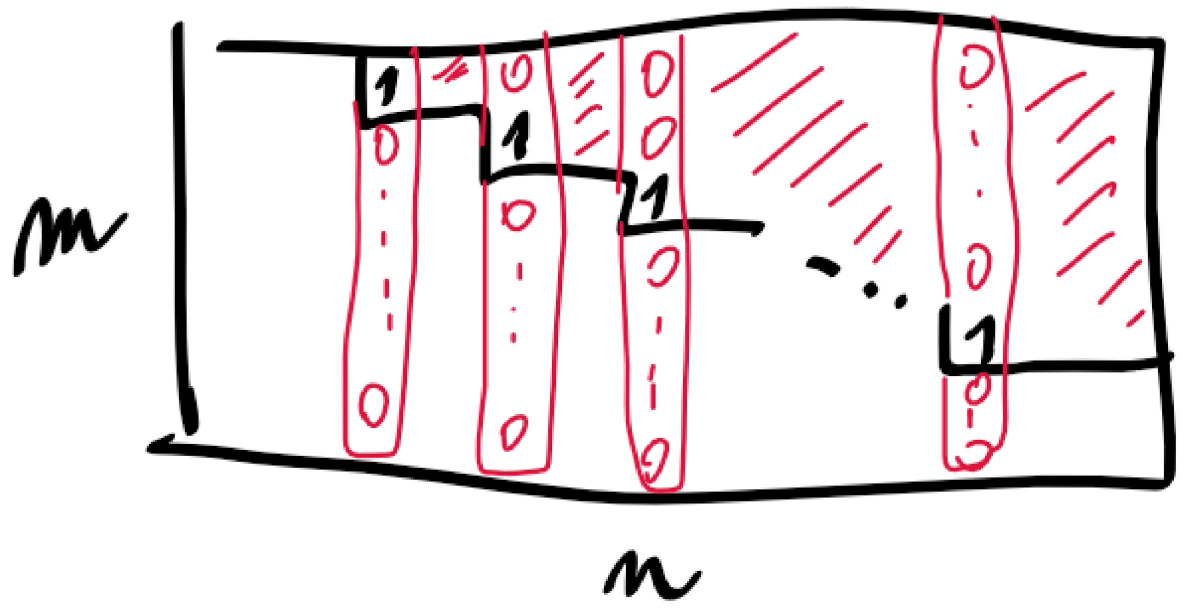
($4^Ř$) ŘÁDKY ....

($5^Ř$) ŘÁDKY ....

• GAUSSOVA-JORDANOVA ELIMINACE:

- **DEF 5.96:** MATICE A TYPU $m \times n$ NAD T JE V **REDUKOVANÉM (ŘÁDKOVĚ) ODSTUPŇOVANÉM TVARU** POKUD
  - A JE V ODSTUPŇOVANÉM TVARU A NAVÍC
  - BÁZOVÉ SLOUPCE A JSOU TVARU $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

TJ:



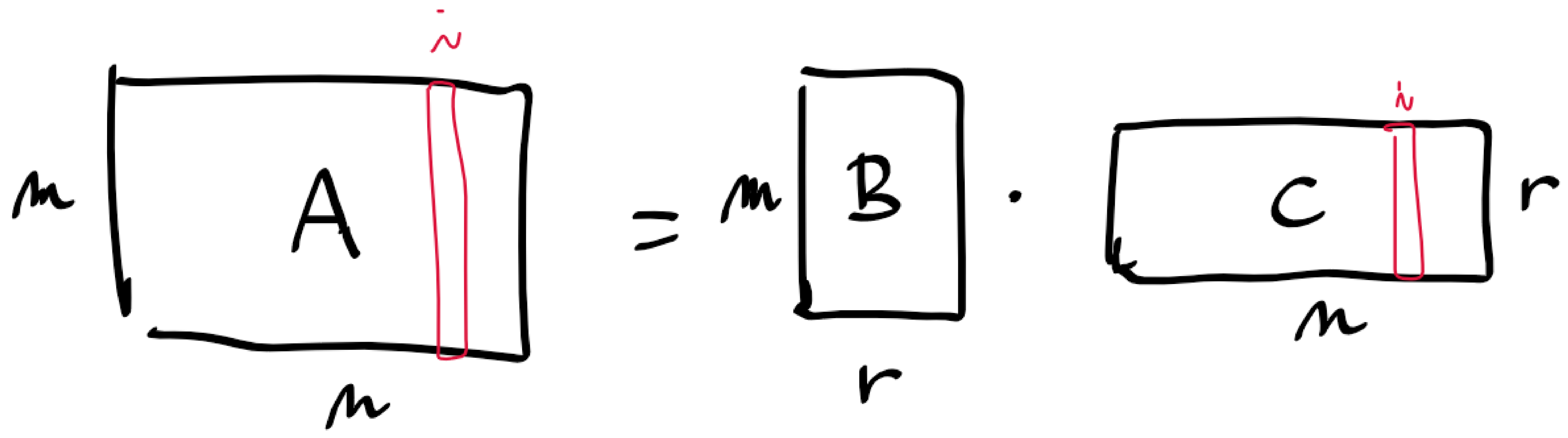
- **POZOROVÁNÍ:** KAŽDOU MATICI A MŮŽEME POMOCÍ EŘÚ DOSTAT DO REDUKOVANÉHO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU.
  POSTUP SE NAZÝVÁ **GAUSSOVA-JORDANOVA ELIMINACE**.

- **POZN:** POKUD JE A REGULÁRNÍ ŘÁDU n: $n\{(\underbrace{A \mid I_n}_{2\cdot n}) \xrightarrow{G.J.} (I_n \mid A^{-1})$

– SKELETNÍ ROZKLAD MATICE

• BUĎ A TYPU $m \times n$ NAD T, $r := \text{rank}(A)$

=> MŮŽEME PSÁT



– **DEF**: SKELETNÍ ROZKLAD A TYPU $m \times n$ HODNOSTI r JE LIBOVOLNÉ VYJÁDŘENÍ $A = B \cdot C$, KDE B JE TYPU $m \times r$ A C JE TYPU $r \times n$.

– **V 5.97**: ŘÍKÁ, JAK POČÍTAT SKELETNÍ ROZKLAD POMOCÍ G.-J. ELIMINACE.

SLR JEŠTĚ JEDNOU

- **V 5.98** (FROBENIOVA)
  SLR $A \cdot x = b$ (A TYPU $m \times n$ NAD T, $b \in T^m$)
  JE ŘEŠITELNÁ, PRÁVĚ KDYŽ
  $$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b).$$

- **Dk:** $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$

  $\Updownarrow$

  b NENÍ BÁZOVÝ SLOUPEC $(A|b)$

  $\Updownarrow$

  $b \in \operatorname{Im}(A)$

  $\Updownarrow$

  SLR $A \cdot x = b$ MÁ ŘEŠENÍ

- VZTAH DIMENZÍ $\ker(A)$ A $\mathrm{Im}(A)$

- **V5.99:** BUĎ A MATICE TYPU $m \times n$ NAD T. PAK

$$\dim(\ker(A)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(A))}_{\mathrm{rank}(A)} = n \quad (= \#\text{SLOUPCŮ})$$

- **Dk:** (NÁZNAK) – Z ALGORITMU PRO ŘEŠENÍ SLR $A \cdot x = 0$ VÍME, ŽE

$$\#\text{PARAMETRŮ ŘEŠENÍ} = n - \underbrace{\#\text{BÁZOVÝCH SLOUPCŮ}}_{\mathrm{rank}(A)}$$

$$\underbrace{\#\text{PARAMETRŮ} = \#\text{VOLNÝCH PROMĚNNÝCH}}_{\dim(\ker A)}$$

- PRŮNIKY A SOUČTY VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

  - ŘEKNĚME, ŽE MÁME V. P. V
    A NĚJAKÉ PODPROSTORY V_i, $i \in I$ $(V_i \leq V)$

  - OTÁZKY:
    1. JAKÝ JE NEJVĚTŠÍ PODPROSTOR $W \leq V$ TAKOVÝ, ŽE $W \leq V_i$?
    2. JAKÝ JE NEJMENŠÍ PODPROSTOR $W \leq V$ TAKOVÝ, ŽE $V_i \leq W$?

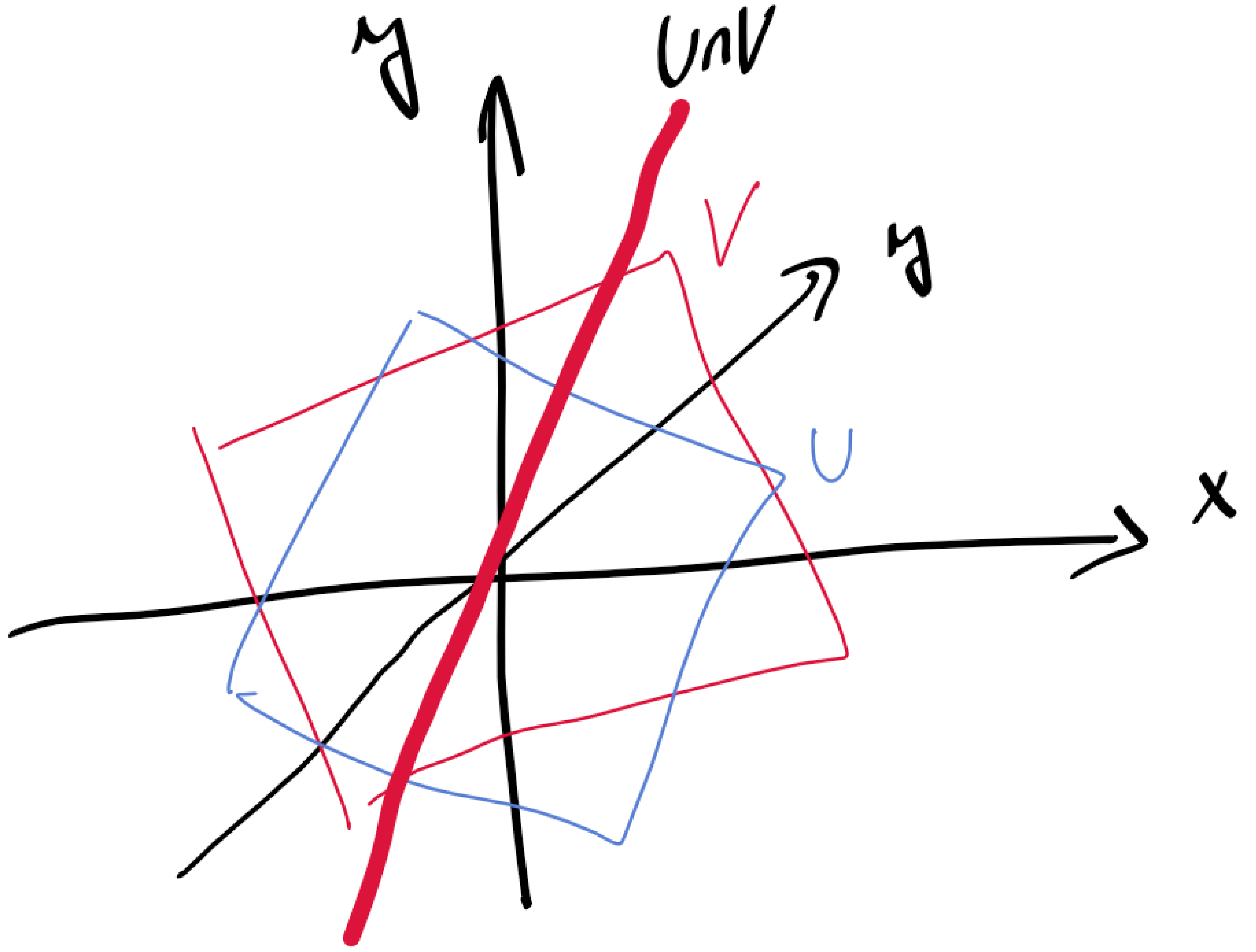
- ODPOVĚĎ NA 1:
  - T5.101: $\bigcap_{i \in I} V_i \leq V$. (MŮŽEME UŽÍT $W = \bigcap_{i \in I} V_i$)

- ODPOVĚĎ NA 2: $W = LO\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \{ v_{i_1} + \dots + v_{i_k} : k \in \mathbb{N},\ i_1, \dots, i_k \in I \}$
  - SPECIÁLNĚ PRO $I = \{1, 2\}$: $W = LO\ V_1 \cup V_2 = \{ v_1 + v_2 : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \} \leq V$
  - PÍŠEME $V_1 + V_2 := LO\ V_1 \cup V_2$, $\sum_{i \in I} V_i := LO \bigcup_{i \in I} V_i$

- <u>VS.103</u>: BUĎ W VEKTOROVÝ PROSTOR A $U, V \subseteq W$.

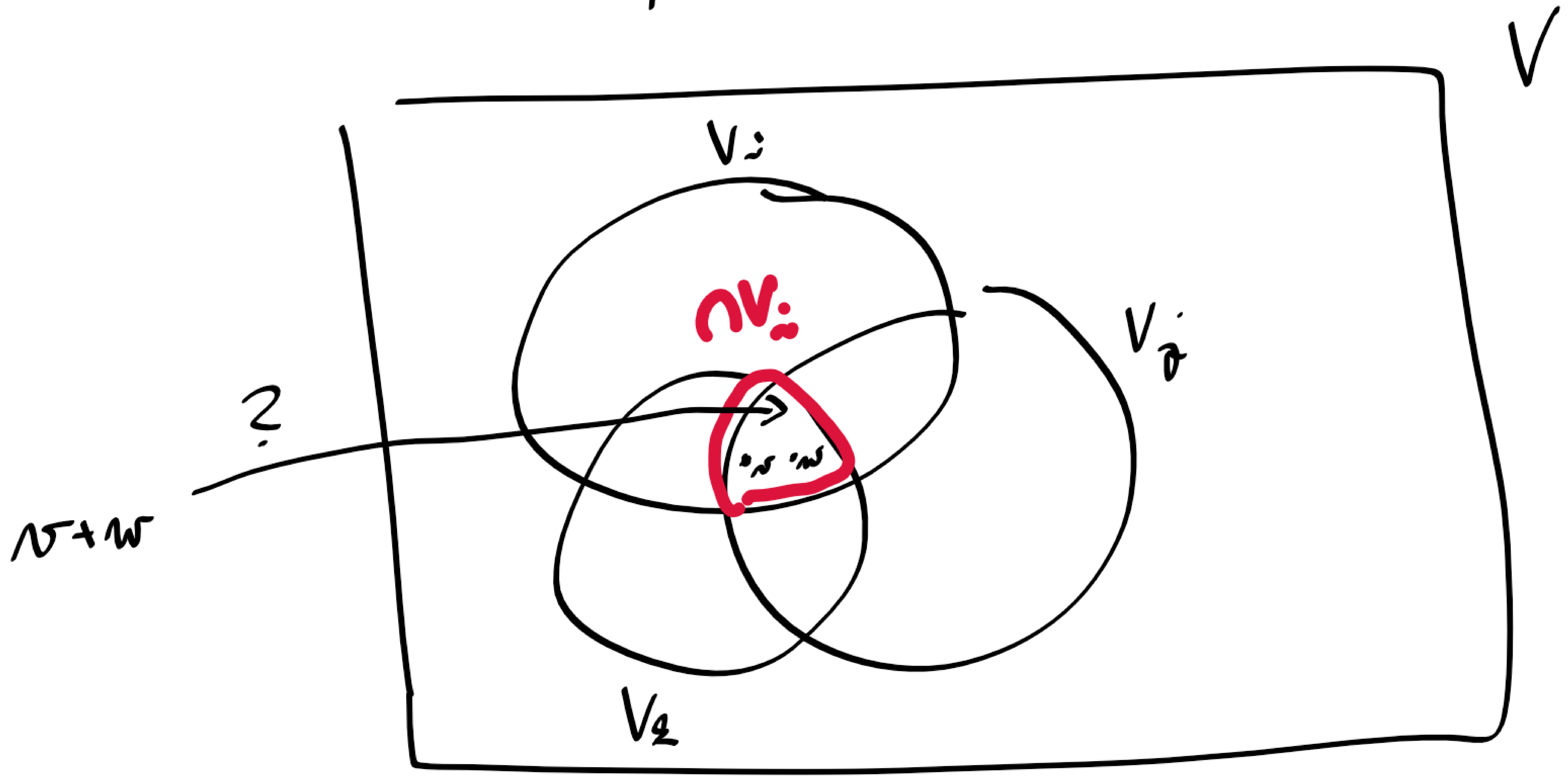
PAK:

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$$



$U + V = \mathbb{R}^3$

– BUO V V.P., $V_i \leq V$ $(i \in I)$



$\forall i$
$V_i \leq V$

– $v, w \in \bigcap_{i \in I} V_i \Rightarrow \forall i: v, w \in V_i \Rightarrow \forall i: v+w \in V_i$

$\Rightarrow v+w \in \bigcap_{i \in I} V_i$