

## Sada 2 (deadline 16.3. 23:59)

### 2.1 Provětrati větráky

Vítejte ve firmě Agrofan zabývající se výrobou kvalitních větráků pro Česko a Slovensko. Naše větráky jsou tak kvalitní, že nikdy neselžou před zárukou. V duchu doby zrovna vyvíjíme nový větrák pro potřebu státní správy, aby naši úředníci mohli pracovat i přes léto v kvalitním prostředí. Nyní zrovna probíhá návrh tištěného spoje pro tento větrák a vaším úkolem bude navrhnout speciální součástku, tzv. kazítka<sup>TM</sup> (pojmenované dle pověstné léčitelky Kazi), které bude mít na starosti správné nastavení větráku vzhledem k okolnímu prostředí. Životnost této součástky by měla být přibližně dva a půl roku a přirozeně by měla být co nejlevnější. S ostatními součástkami si starosti nedělejte, ty vydrží i desetiletí...

Při návrhu obvodu kazítka<sup>TM</sup> máte dvě možné cesty, jak dosáhnout jeho spolehlivosti. Můžete jednak zvýšit redundanci nebo zvolit kvalitnější technologii. Jediná vůle je v konfiguraci tranzistorů, které jsou občas na hraně svých parametrů, a kondenzátorů, které dokáží potenciálně nebezpečné výkyvy v obvodu vyhladit. Počty přidáných součástek přenásobíte odpovídajícími koeficienty a sečtením dostanete prodloužení životnosti v měsících. Samotný obvod je schopen vydržet jeden rok.

- Cena kondenzátor: 0.1 Kč, koef. životnosti 0.2
- Cena kondenzátor – kvalitní: 1.0 Kč, koef. životnosti 0.83
- Cena tranzistor: 0.35 Kč, koef. životnosti 0.85
- Cena tranzistor – kvalitní: 0.5 Kč, koef. životnosti 1.3

Najděte počty jednotlivých součástek a sepište krátké odůvodnění pro vaši volbu tak, aby to i váš nadřízený s humanitním vzděláním pochopil.

### 2.2 Aprílová novinařina

Místní novinový plátek tě kontaktoval s žádostí o napsání krátkého článku pro Aprílové vydání populárně naučného časopisu. Napadlo tě, že si to říká o záměnu korelace s kauzalitou. Když už si z někoho vystřelit, tak ať to stojí za to. Stáhl(a) sis data o popularitě termínů "politika" a "toaletní papír". Teď už jen vytvořit model na základě těchto dat a napsat článek.

Najděte vhodný model typu Moving Average, který z popularity termínu "toaletní papír" předpoví popularitu termínu "politika" pro následující týden. Model vytvořte dle dat ze souboru train.csv a navrhnete ho tak, aby byl co nejúspěšnější i na datech z test.csv. Napište krátký aprílový článek (slušný jazyk, nicméně ironie/satyra apod. jsou v pořádku), kde čtenářům představíte svůj model a popíšete jeho důsledky (>300 slov).

## 2.3 Obávaná teoretická otázka

Níže najdete seznam tvrzení o dvou čtvercových maticích  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Seskupte je do skupin (největších možných) ekvivalentních tvrzení. Vyberte jednu 3-prvkovou a jednu 2-prvkovou skupinu a dokažte ekvivalenci tvrzení uvnitř těchto skupin. Uveďte příklad ukazující, že sjednocení těchto skupin neobsahuje ekvivalentní tvrzení.

1.  $\text{Im}(B) \subseteq \text{Im}(A)$
2.  $\text{Im}(A) \subseteq \text{Ker}(B)$
3.  $\text{Ker}(A) \subseteq \text{Ker}(B)$
4.  $\text{Im}(B) \subseteq \text{Ker}(A)$
5.  $\text{Ker}(A^T) \supseteq \text{Im}(A^T)$
6.  $AB = 0$
7.  $BA = 0$
8.  $\exists Y \in \mathbb{R}^{n \times n} : B = YA$
9.  $\exists Z \in \mathbb{R}^{n \times n} : B = AZ$
10.  $\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(A)$
11.  $\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(B)$
12.  $\text{rank}\left(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right) = \text{rank}(B)$
13.  $\text{Im}(A) \perp \text{Ker}(B^T)$

## 2.4 μsíte to dokázat

Matici tvaru  $m \times n$  nazveme tlustou, jestliže  $m < n$ . Za předpokladu  $\mu > 0$  dokažte následující tvrzení:

1.  $(A^T A + \mu I)$  je invertibilní (hint: Přenásobte zprava  $z$  z jádra a zleva prvkem  $z^t$ . Jak vypadá jádro?)
2.  $A^T(AA^T + \mu I) = (A^T A + \mu I)A^T$  (hint: Využijte inverzy z předchozího bodu)
3.  $A$  tlustá a full-rank, pak

$$(A^T A + \mu I)^{-1} A^T \xrightarrow{\mu \rightarrow +0} A^T (AA^T)^{-1}.$$

4. Která úloha na regularizaci vede na řešení soustavy  $(A^T A + \mu I)\hat{x} = A^T y$ ?
5. Jaká úloha vede na řešení soustavy  $x = A^T (AA^T)^{-1} y$  a co říká bod 3 o vzájemném vztahu bodů 4 a 5? Vysvětlení vzájemného vztahu může být i pomocí obrázku.