

## Zemětřesení

Mějme chování budovy během zemětřesení popsané dynamickým systémem

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ -0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

V počátečním stavu víme, že  $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  a dále platí

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t),$$

kde  $u$  odpovídá posunu země a  $y$  odchylce vršku budovy. Uvažme, že  $\sum_{t=0}^{49} u(t)^2 \leq 1$  a  $u(t) = 0$  pro  $t \geq 50$ .

- Jak velké může být  $\sum_{t=0}^{99} y(t)^2$ ?

Jistě  $y(t) = Cx(t) = C(Ax(t-1) + Bu(t-1)) = C \sum_{i=0}^{t-1} A^i Bu(t-1-i)$ .

$$Mu = \begin{pmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{98}B & \dots & & & CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(98) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(99) \end{pmatrix}$$

Jelikož ale od  $t = 50$  jsou  $u(t)$  nulová, pak matici  $M$  ořízneme posledních 49 sloupců:

$$\begin{pmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{98}B & \dots & & & CA^{49}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(49) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(99) \end{pmatrix}$$

Optimální  $u$  poté nalezneme za pomoci singulárního rozkladu. Jelikož matice  $U, V$  z tohoto rozkladu jsou ortogonální (tj. nemění normu vektoru), pak největší singulární číslo bude odpovídat právě nejhoršímu případu.

- Jak velké může být  $|y(100)|$ ?

$$y(100) = Cx(100) = CA^{99}u(0) + CA^{98}u(1) + \dots + CA^{50}u(50)$$

Nyní je už zřejmé, že stačí nalézt největší koeficient tohoto polynomu v  $u(t)$ , jehož absolutní hodnota bude právě náš hledaný horní odhad.