Vyučující: H. Švihlová/1
Příklad pro: standardní písemku
Počet bodů: 4

Zadání: Spočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),x=0} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} 0 = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x^3} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}.$$

Limita tedy neexistuje.

Bodování:
2 body za volbu cest k $(0,0)$
1 bod za jednotlivé limity
1 bod za závěr.

Vyučující: H. Švihlová/2
Příklad pro: standardní písemku
Počet bodů: 4

Zadání: Najděte Taylorovu řadu funkce

$$f(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2}$$

se středem v bodě $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Řešení: Platí (pro $|x+y| < 1$)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+x+y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x+y)^k\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l y^{k-l}\Big) = (m = k-l) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{l,m=0}^{\infty}(-1)^{l+m}\frac{(m+l)!}{m!\cdot l!}x^l y^m\Big) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{l+m}\frac{(m+l)!}{m!\cdot(l-1)!}x^{l-1}y^m \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{l+m+1}\frac{(m+l)!}{m!\cdot l!}x^l y^m
\end{aligned}$$

Bodování:
1 bod za užití parc. derivace
2 body za rozvoj $1/(1+x+y)$
1 bod za derivaci sumy (včetně zdůvodnění).

Vyučující: kol. Švihlová
Příklad pro: standardní písemku
Počet bodů: 7

Zadání: Nalezněte globální maximum funkce

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2x$$

na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y - x \le 1\}.$$

Řešení: Spojitá funkce f nabývá svých globálních extrémů na kompaktní množině M. Tu si v zájmu aplikace nutné podmínky rozdělíme

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6 \\ &= \{0 < x < 1, 0 < y - x < 1\} \cup \{0 = x, 0 < y - x < 1\} \\ &\cup \{x = 1, 0 < y - x < 1\} \cup \{0 < x < 1, 0 = y - x\} \\ &\cup \{0 < x < 1, y - x = 1\} \cup \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2)\}. \end{aligned}$$

Protože $\nabla f = (2x+2, -2y)$ a $(-1,0) \notin M_1$, na M_1 není stacionární bod.

Na M_2 pracujeme s $g(y) = f(0,y) = -y^2$ pro $y \in (0,1)$ a opět nemáme stacionární bod.

Na M_3 pracujeme s $g(y) = f(1,y) = -y^2 + 3$ pro $y \in (1,2)$ a opět nemáme stacionární bod.

Na M_4 pracujeme s $g(x) = f(x,x) = 2x$ pro $x \in (0,1)$ a opět nemáme stacionární bod.

Na M_5 pracujeme s $g(x) = f(x, 1+x) = x^2 - (x^2 + 2x + 1) + 2x = -1$ a všechny body jsou stacionární.

Zbývá $f(0,0) = 0, f(0,1) = -1, f(1,1) = 2, f(1,2) = -1$.

Celkově $\max_M f = 2$.

Bodování:
2 body za takticky vhodný rozklad na podmnožiny
3 body za práci na jednotlivých podmnožinách (1 bod za vnitřek, 1 bod za snadno zpracovatelné části hranice, 1 bod za správné vyhodnocení možná trochu matoucí situace na M_5)
2 body za správný závěr a dokonalost (zde dávat vše nebo nic, viditelně musí být použita věta o spojité funkci na kompaktu, nutné podmínky podrobně rozepisovat nemusejí).