Domácí úkol č.2:

1. Spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[10]{x+1}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}-1}$

Řešení:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[10]{x+1}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[10]{(x+1)^2}-\sqrt[10]{x+1}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}-1} \frac{\sum_{i=0}^{9}(x+1)^{\frac{1}{5}(9-k)}(x+1)^{\frac{k}{10}}}{\sum_{i=0}^{9}(x+1)^{\frac{1}{5}(9-k)}(x+1)^{\frac{k}{10}}} \frac{\sum_{i=0}^{4}(x+1)^{\frac{2}{5}(4-k)}}{\sum_{i=0}^{4}(x+1)^{\frac{2}{5}(4-k)}} =$ (voal) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-(x+1)}{(x+1)^2-1} \frac{5}{10} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2+2x} \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x+2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2. Zderivujte funkci $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, určete její definiční obor, definiční obor její derivace a případné jednostranné derivace.

Řešení:

$D_f : -1 \leq \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leq 1 \quad \& \quad \frac{1-x}{1+x} \geq 0$. První nerovnost je splněna vždy, druhou nerovnost umocníme a zůstává
$0 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1$.
První nerovnost vede k $x \in (-1; 1]$, druhá k $x \in (-\infty; -1) \cup [0; \infty)$, tedy $D_f = [0; 1]$.

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x-1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} =$
$= \frac{1}{(1+x)\sqrt{2x}\sqrt{1-x}}$

$D_{f'} = (0; 1)$.

$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{(1+x)\sqrt{2x}\sqrt{1-x}} = +\infty$

$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{(1+x)\sqrt{2x}\sqrt{1-x}} = +\infty$