7. Dokažte pro $n \in \mathbf{N} : n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
Bylo na cviceni.

8. Dokažte pro $n \in \mathbf{N} : (2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

a, n=1, LS=2, PS=4

b, V(n)->V(n+1)
Indukční předpoklad: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
Chci dokázat: $(2n+2)! < 2^{2n+2}((n+1)!)^2$

Nejprve si upravím pravou stranu:
$PS = 2^{2n+2}((n+1)!)^2 = 4(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2 = (4n^2+8n+4)2^{2n}(n!)^2$
$LS = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! < (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2 < (4n^2+6n+2)2^{2n}(n!)^2 < (4n^2+8n+4)2^{2n}(n!)^2 = PS$

9. Dokažte pro $x_k \in [0,\pi], k = 1, 2, .., n, n \in \mathbf{N}$:

$$|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

a, n=1, LS=$|\sin x_1|$, PS=$\sin x_1$
Na intervalu $[0,\pi]$ je sinus kladny, plati rovnost.

b, V(n)->V(n+1)
Indukční předpoklad: $|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$
Chci dokázat: $|\sin\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k$

$LS = |\sin\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)| = |\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)| = |(\sin\sum_{k=1}^{n} x_k)\cos x_{n+1} + (\cos\sum_{k=1}^{n} x_k)\sin x_{n+1}| \leq |(\sin\sum_{k=1}^{n} x_k)||\cos x_{n+1}| + |(\cos\sum_{k=1}^{n} x_k)||\sin x_{n+1}| \leq |(\sin\sum_{k=1}^{n} x_k)| + |\sin x_{n+1}|$

Pouzijeme indukcni predpoklad a to, ze sinus je na tomto intervalu kladny. Pak
$LS \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + |\sin x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k$

Pouzil se vzorec pro sinus souctu, vlastnosti absolutni hodnoty ($|a+b| \leq |a| + |b|$ a $|ab| = |a||b|$) a vlastnost cosinu ($|cos\, x| \leq 1$).

11. Dokažte pro $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$: $n^{n+1} > (n+1)^n$

a, n=3, LS=$3^4 = 81$, PS=$4^3 = 64$

b, V(n)->V(n+1)
Indukční předpoklad: $n^{n+1} > (n+1)^n$
Chci dokázat: $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$

$LS = (n+1)^{n+2} = (n+1).(n+1)^{n+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}n^{n+1-k}1^k$
$= (n+1)n^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}n^{-k}$

Pouzijeme indukcni predpoklad: $LS > (n+1)(n+1)^n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}n^{-k} = (n+1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n+1-k} = (n+1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1}$

Zbyva dokazat: $\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1} > (n+2)^{n+1}$.
Protoze n+1>0, staci dokazat: $\frac{(n+1)^2}{n} > n+2$.

Plati $n^2+2n+1 > n^2+2n \Rightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \Rightarrow \frac{(n+1)^2}{n} > n+2$, protoze n je kladne.
12, U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min, pokud existují.
e, $M = \{0.5, 0.55, 0.555, ...\}$

$\min M = 0.5$, tedy i $\inf M = 0.5$.

Horní hranicí této množiny je $0.\overline{5} = \frac{5}{9}$, ale není v množině, tedy $\max M$ neexistuje, ukažme si, že je to supremum.

1, $0.\overline{5} \geq x \quad \forall x \in M$, protože každé x má konečný počet desetinných míst
2, $\forall s' < \frac{5}{9}\, \exists x \in M : x \leq s'$, protože
a, pro $s' < 0.5$ je to $x = 0.5$
b, pro $0.5 \leq s' < \frac{5}{9}$ musí existovat desetinné místo různé od 5. První takové desetinné místo (k-té desetinné místo) různé od 5 musí být menší než 5 ($s' < \frac{5}{9}$) a tedy $x \in M : x \leq s'$ je x s k desetinnými místy.

f, $M = \{x \in \mathbb{Q}\, x^2 < 3\}$

$\forall x \in M : x^2 < 3 \Rightarrow |x| < \sqrt{3} \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

neexistuje maximum ani minimum, $\sup M = \sqrt{3}$, $\inf M = -\sqrt{3}$, důkaz o iracionálnosti $\sqrt{3}$ jako na přednášce pro $\sqrt{2}$.

15. Nechť M je neprázdná omezená množina a nechť $f, g : M \to \mathcal{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

b, $\sup_M(f(x) + g(x)) \geq \sup_M f(x) + \inf_M g(x)$
Víme, že $f(x), g(x) \in \mathcal{R}\, \forall x \in M$. Z vlastnosti infima máme $g(x) \geq \inf_M g(x)$. Pak

$$f(x) + g(x) \geq f(x) + \inf_M g(x)$$

$$\sup_M(f(x) + g(x)) \geq \sup_M(f(x) + \inf_M g(x))$$

Ovšem $\inf_M g(x) \in \mathcal{R}$ je pevné číslo, tedy

$$\sup_M(f(x) + g(x)) \geq \sup_M f(x) + \inf_M g(x)$$

c, $\sup_M(f(x) - g(x)) \leq \sup_M f(x) - \inf_M g(x)$

$$f(x) \leq \sup_M f(x),\ \inf_M g(x) \leq g(x)$$

$$f(x) - g(x) \leq \sup_M f(x) - \inf_M g(x)$$

Na pravé straně je pevné reálné číslo, tedy

$$\sup_M(f(x) - g(x)) \leq \sup_M(\sup_M f(x) - \inf_M g(x)) = \sup_M f(x) - \inf_M g(x)$$