Zadani:
Urcete vsechna maximalni reseni:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$$

Reseni:
Definicni obor: $x \neq -1$, tj. resim na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$
Charakteristicky polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ ma dvojnasobny koren -2, tedy tvar homogenniho reseni

$$y_H = \overline{c_1}e^{-2x} + \overline{c_2}xe^{-2x}, \quad \overline{c_1}, \overline{c_2} \in R$$

Partikularni reseni hledam metodou variace konstant ve tvaru

$$y_P = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)xe^{-2x}$$

Resim tedy rovnice

$$c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)xe^{-2x} = 0$$
$$-2c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-2x} - 2c_2'(x)xe^{-2x} = \frac{e^{-2x}}{x+1}$$

Odtud $c_2(x) = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + c$ a $c_1(x) = \int \frac{-x}{x+1}\,dx = -x + \ln|x+1| + c$.

Obecne reseni pro $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (-1, \infty)$:
$y = y_P + y_H = (-x + \ln|x+1|)e^{-2x} + xe^{-2x}\ln|x+1| + \overline{c_1}e^{-2x} + \overline{c_2}xe^{-2x}$, $\overline{c_1}, \overline{c_2} \in R$

Zadani:
Urcete vsechna maximalni reseni:

$$y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos(3x)}$$

Reseni:
Definicni obor: $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, tj. resim na intervalech ve tvaru $(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}(k+1)\pi)$, $k \in Z$
Charakteristicky polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 10$ ma koreny $1 \pm 3i$, tedy tvar homogenniho reseni

$$y_H = \overline{c_1}e^x \cos(3x) + \overline{c_2}e^x \sin(3x), \quad \overline{c_1}, \overline{c_2} \in R$$

Partikularni reseni hledam metodou variace konstant ve tvaru

$$y_P = c_1(x)e^x \cos(3x) + c_2(x)e^x \sin(3x)$$

Resim tedy rovnice

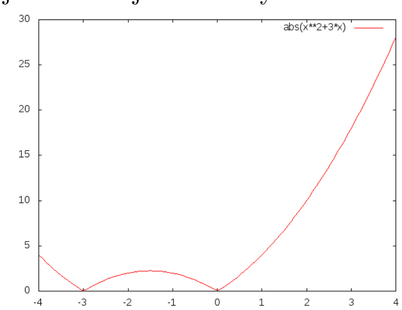
$$c_1'(x)e^x \cos(3x) + c_2'(x)e^x \sin(3x) = 0$$
$$c_1'(x)e^x \cos(3x) - 3c_1'(x)e^x \sin(3x) + c_2'(x)e^x \sin(3x) + 3c_1'(x)e^x \cos(3x) = \frac{9e^x}{\cos(3x)}$$

Odtud $c_2(x) = \int 3\,dx = 3x + c$ a $c_1(x) = \int -3\mathrm{tg}(3x)\,dx = \ln|\cos(3x)| + c$.

Obecne reseni na intervalech $(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}(k+1)\pi)$, $k \in Z$:
$y = y_P + y_H = e^x \cos(3x)\ln|\cos(3x)| + 3xe^x \sin(3x) + \overline{c_1}e^x \cos(3x) + \overline{c_2}e^x \sin(3x)$, $\overline{c_1}, \overline{c_2} \in R$

Zadani:
Vysetrete lokalni a globalni extremy nasledujicich funkci:
a, $f_1(x) = |x^2 + 3x|$ pro $x \in [-4, 4]$
b, $f_2(x) = \min\{x^4 - 4x - 1,\ x^2 - 4x + 5\}$
c, $f_3(x) = \tanh(x) + \coth(x)$ pro $x \in (0, 1]$
Postup:
1, urceni definicniho oboru
2, 1.derivace a body podezrele z extremu
3, limity v krajnich bodech definicniho oboru (pripadna $\pm\infty$)
4, tabulka nebo jine oduvodneni lokalnich extremu
5, funkcni hodnoty nebo jine oduvodneni globalnosti extremu
Pozn.1 Spojita fce na omezenem intervalu ma vzdy globalni maximum a minimum.
Pozn.2 Pokud jsou dva a vice bodu x nabyvajicich stejne hodnoty lokalniho/globalniho maxima/minima, mluvime o neostrem lokalnim/globalnim maximu/minimu, pokud je prave jeden, pak o ostrem.

Reseni:
a, $D_f = [-4, 4]$, funkce je spojita (spojitost druhe mocniny, absolutni hodnoty a zakladnich aritmetickych operaci).Pokud je funkce takto jednoducha, je nejjednodussi ji rovnou vykreslit.



$f(-4) = 4$, $f(4) = 28$, tedy globalni minima v bodech -3 a 0, globalni maximum v bode 4. Lokalni maximum je v bodech -4 a -3/2.

b, $D_f = (-\infty, \infty)$, funkce je spojita. Nejprve urcim, jak tato funkce vypada.

$$\begin{aligned} x^4 - 4x - 1 &< x^2 - 4x + 5 \\ x^4 - x^2 - 6 &< 0 \quad x^2 = y \\ y^2 - y - 6 &< 0 \\ (y-3)(y+2) &< 0 \\ y = & x^2 \in (-2; 3) \\ & x \in (\sqrt{3}; \sqrt{3}) \end{aligned}$$

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f(x)$	$x^2 - 4x + 5$	$x^4 - 4x - 1$	$x^2 - 4x + 5$
$f'(x)$	$2x - 4$	$4x^3 - 4$	$2x - 4$

Funkce je v $\pm\sqrt{3}$ spojita, mohu tedy pouzit pro dopocteni derivace v techto bodech limity spoctenych f'(x): $f'(-\sqrt{3}-) = -2\sqrt(3) - 4$, $f'(-\sqrt{3}+) = -12\sqrt(3) -$

4, tedy $f'(-\sqrt{3})$ neexistuje, podobne pak neexistuje $f'(\sqrt{3})$. Jsou to tedy podezrele body.
$f'(x) = 0$ pro $x = 1$ a $x = 2$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	-	+	-	+

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, globalni maximum tedy neexistuje, lokalni maximum v $x = \sqrt{3}$, lokalni minima v bodech $x = 1$ a $x = 2$, $f(1) = -4$, $f(2) = 1$, globalni minimum tedy existuje a je v bode 1.

c, $D_f = (0, 1]$, funkce je spojita a neni definovana v $x = 0$.
$\lim_{x\to0+} f(x) = "1/0+" = +\infty$, $f'(x) = \frac{-1}{\cosh^2(x)\sinh^2(x)} < 0 \quad \forall x \neq 0$.
Tedy je funkce klesajici na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, neboli je klesajici na celem nasem definicnim oboru. Lokalni ani globalni maximum neexistuje, globalni minimum je v bode 1.
Komentar: jak se zmeni vysledek pro $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$?

Priklady pouziti Darbouxovy vety o nabyvani mezihodnot pro spojite funkce:
Dokazte, ze rovnice $x^3 + x^2 = 5$ ma prave jedno reseni.
Dokazte, ze rovnice $\arccos(x) - \arcsin(x) = -0.5$ ma prave jedno reseni.

Reseni:

a, Existence reseni: $f(x) = x^3 + x^2$, $D_f = R$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Funkce f je spojita, tedy podle Darbouxovy vety nabyva vsech hodnot mezi svymi limitnimi hodnotami, v tomto pripade tedy $H_f = R$, tedy nabyva i hodnoty 5.
Jednoznacnost reseni: podivame se na prubeh funkce. $f'(x) = x(3x+2)$, funkce je rostouci na $(-\infty, -2/3]$, pak klesajici na $[-2/3, 0]$, pak rostouci na $[0, \infty)$. Funkci hodnoty v lokalnich extremech jsou $f(-2/3) = 4/27$, $f(0) = 0$. Tedy funkce nabyva hodnoty 5 na intervalu $[0, \infty)$, kde je prosta (protoze monotonni). Reseni je tedy jednoznacne.

b, Existence reseni: $f(x) = \arccos(x) - \arcsin(x)$, $D_f = [-1, 1]$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = \frac{3\pi}{2}$, $\lim_{x\to1-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Funkce f je spojita, tedy podle Darbouxovy vety nabyva na $[-1, 1]$ vsech hodnot v intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tedy i hodnoty -0.5.
Jednoznacnost reseni: arccos je klesajici funkce, arcsin je rostouci funkce, tedy $-\arcsin$ je taky klesajici. Funkce f tedy klesa na celem svem definicnim oboru, je tedy prosta a reseni je jednoznacne.