Priklady na cviceni

Jakub Takáč

November 2019

Reseny priklad 1

Najdete infimum a supremum funkce $f(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$ na mnozine $M = [-1,1]^3$ a urcete, zda se techto hodnot na mnozine M nabyva, pokud ano, pak v jakych bodech.

Reseni:

M je kompaktni mnozina, na niz je f spojita (je spojita dokonce na celem $\mathbb{R}^3$), tedy na ni nabyva sveho maxima i minima.

Vsimneme si, ze posledni clen z nezavisi na prvnich dvouch clenech, tedy staci hledat extremy funkce $g(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2$ na mnozine $N = [-1,1]^2$. Vskutku, je-li bod (a,b) bodem maxima pro g, pak jiste bod $(a,b,1)$ je bodem maxima pro f. Podobne, je-li bod (a,b) bodem minima pro g, pak jiste bod $(a,b,-1)$ je bodem minima pro f.

Muzeme psat $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2$. Odsud hned vidime (to jsme mohli nahlednout uz drive), ze $g \geq 0$ a jiste $g(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. Okamzite tedy vidime, ze $(0,0)$ je jediny bod minima pro g. S maximem je to o neco slozitejsi, nicmene opet je videt, ze dva celny g jsou na sobe nezavisle, tedy staci maximalizovat $2x^2$ a $2y^2$ samostatne. To umime, je tedy zrejme, ze g nabyva maxima pro hodnoty (x,y) takove, aby $|x|$ a $|y|$ byli co nejvetsi. Zaroven jsme omezeni mnozinou N, tedy lze nahlednout, ze g nabyva maxima v bodech $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$.

Z predchozich dvou odstavcu tedy muzeme konstatovat, ze $\max_M f = f(\pm 1, \pm 1, 1) = 5$ a $\min_M f = f(0,0,-1) = -1$. Maxima se nabyva v bodech $(\pm 1, \pm 1, 1)$, minima se nabyva v bode $(0,0,-1)$.

Reseny priklad 2

Najdete infimum a supremum funkce $f(x,y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ na mnozine $M = \mathbb{R}^2$ a urcete, zda se techto hodnot na mnozine M nabyva, pokud ano, pak v jakych bodech.

Reseni:

Nejprve si uvedomme, ze $f \geq 0$ a $f(x,y) = 0 \iff (x,y) = 0$, tedy jsme okamzite nasli minimum funkce f v bode $(0,0)$ s hodnotou 0. Funkce f jiste nabyva i vetsich hodnot, nez je 0, dale tedy pro hledani suprema budeme pracovat pouze na mnozine $N = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Na N Plati

$$f(x,y) = e^{\log(x^2+5y^2)} e^{-3x^2-y^2} = e^{\log(x^2+5y^2)-3x^2-y^2}.$$

Protoze exponenciala je rostouci funkce, staci hledat extremy pouze vnitrni funkce $g(x,y) = \log(x^2 + 5y^2) - 3x^2 - y^2$ na N. Nejprve pouzijeme nutnou podminku pro existenci lokalniho extremu, tj. najedeme body, kde gradient funkce g bud neexistuje (takove zadne body nejsou), nebo je roven 0. Resime tedy soustavu

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0,$$

to jest

$$\frac{2x}{x^2+5y^2} - 6x = 0, \quad \frac{10y}{x^2+5y^2} - 2y = 0.$$

Po uprave
$$x\left(\frac{2}{x^2+5y^2}-6\right)=0,\quad y\left(\frac{10}{x^2+5y^2}-2\right)=0.$$
Muzeme konstatovat, ze kazde reseni soustavy splnuje jednu z podminek

(i) $x=0$, $y=0$

(ii) $x=0$, $\frac{10}{x^2+5y^2}=2$

(iii) $y=0$, $\frac{2}{x^2+5y^2}=6$

(iv) $\frac{10}{x^2+5y^2}=2$, $\frac{2}{x^2+5y^2}=6$

Dale vidime
$$\frac{10}{x^2+5y^2}=2 \iff 5=x^2+5y^2, \tag{1}$$
$$\frac{2}{x^2+5y^2}=6 \iff \tfrac{1}{3}=x^2+5y^2. \tag{2}$$
Zrejme tedy (iv) nikdy neplati. Dale (i) se nemusime zabyvat, nebot jediny bod splnujci (i) nelezi v N. Pro (ii) kombinaci $x=0$ a (1) dostaneme $y=\pm 1$. Pro (iii) kombinaci $y=0$ a (2) dostaneme $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Funkce g tedy muze nabyvat minima v bodech $(0,\pm 1)$ a $(\pm\frac{1}{\sqrt{(3)},},0)$. Dale
$$g(0,\pm 1)=\log 5-1,\quad g(\pm\tfrac{1}{\sqrt{(3)}})=\log\tfrac{1}{3}-1.$$
Jiz jsme si rozmysleli, ze funkce f muze nabyvat minima pouze v bodech, kde minima nabyva funkce g, protoze $f=e^g$, mame tedy
$$f(0,\pm 1)=\tfrac{5}{e},\quad f(\pm\tfrac{1}{\sqrt{(3)}})=\tfrac{1}{3e}.$$
Jiste $\frac{5}{e}>\frac{1}{3e}$, muzeme tedy mit podezreni, ze $\sup_M f=\max_M f=\max_N f=\frac{5}{e}$ a maxima se nabyva v bodech $(0,\pm 1)$. Jiste vime, ze maxima se v zadnych jinych bodech nenabyva.

Nyni vysvetlime, proc nase nalezene (lokalni) maximum v bodech $(0,\pm 1)$ je maximum globalni (mohlo by se napriklad stat, ze funkce f se pro x a y jdouci do nekonecna blizi k nejake hodnote, ktera je vetsi nez $\frac{5}{e}$). Nejprve si uvedomme, ze M neni kompaktni mnozina, tedy i pres to, ze f je spojita na cele M, nemusi na ni nabyvat svych extremu. Ze nabyva sveho infima, tedy minima, lze ukazat snadno, jak je videt na zacatku reseni. Ze nabyva sveho suprema, tedy maxima, je o neco slozitejsi.

Ze zkusenosti vime, ze exponenciala je "silnejsi", nez polynom, muzeme tedy hadat, ze funkce f bude omezena a pro velke hodnoty x a y blizka nule. Pro rigorozni vypocet si muzeme napriklad uvedomit, ze funkce f splnuje nasledujci sandwitch
$$0\le f(x,y)\le 5(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$
Jiste plati
$$\lim_{r\to\infty} 5r^2e^{-r^2}=0, \tag{3}$$
pricemz funkce v argumentu limity je omezena na celem $\mathbb{R}$. Odsud muzeme vyvodit, ze f je omezena (nebot je mezi dvema omezenymi funkcemi). Dale nutne musi existovat polomer $r_0>0$ takovy, ze $\sup_M f=\sup_{B(0,r_0)} f$, kde $B(0,r_0)$ znaci *uzavrenou* kouli se stredem v 0 o polomeru r_0. To plati z nasledujciho duvodu. Jiste $\sup_M f=t>0$. Najdeme $r_0\ge 0$ takove, aby pro $r>r_0$ $5r^2e^{-r^2}<\frac{t}{2}$. To lze dle (3). Pak jiste mimo $B(0,r_0)$ plati $f(x,y)\le 5(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}<\frac{t}{2}$, nebot $x^2+y^2>r_0^2$ z definice koule. Odsud jiz plyne, ze $\sup_M f=\sup_{B(0,r_0)} f$, nebot mimo danou kouli ma funkce f prilis male hodnoty.

Nyni muzeme uspesne pouzit vetu o nabyvani extremu spojite funkce na kompatech a konstatovat, ze f nabyva sveho maxima kdesi na kouli $B(0, r_0)$, tedy specialne, nabyva sveho maxima nekde na M.

Poznamka

Stacionarni body v druhem priklade jde samozrejme najit i rovnou pro funkci f a vse samozrejme vyjde stejne.