Priklady na cviceni, konvergence rad

Reseny priklad
Jedna se priklad 15 ze sbirky (oddil konvergence rad).
Rozhodnete, zda-li rada
$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$
konverguje a zda-li konverguje absolutne.

Reseni Oznacme si nejprve jednolive cleny rady
$$a_k = \log\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right).$$
Zamysleme se nejprve nad tim, jak se rada "zhruba" chova. V jednotlivych clenech se vyskytuje alternujci clen $(-1)^{k+1}$, mozna je tedy vhodne podivat se na liche a sude cleny samostatne. Mame
$$a_{2k} = \log\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$
Ze znamych limit a Heineho vety vime, ze
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k}}{\frac{-1}{2k}} = \lim_{x\to 0} -\frac{log(1-x)}{x} = 1.$$
Odsud vidime, ze posloupnost sudych clenu se chova asi jako $\frac{-1}{2k}$.

Podobne pro liche cleny mame
$$a_{2k+1} = \log\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)$$
a opet ze znamych limit a Heineho vety
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+1}}{\frac{1}{2k+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1.$$
Odsud vidime, ze posloupnost lichych clenu se chova asi jako $\frac{1}{2k+1}$. Odsud muzeme nahlednout, ze cela posloupnost a_k se bude chovat zhruba jako posloupnost b_k, kde
$$b_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{k},$$
tedy $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{-1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, atd. Predpokladame-li, ze konvergence rady $\sum a_k$ je ekvivalentni konvergenci rady $\sum b_k$ (jak nam napovidaji uvahy vyse), pak jiste $\sum a_k$ konverguje neabsolutne, ale nekonverguje absolutne. Vime totiz se $\sum |b_k|$ nekonverguje (Veta 8) ale $\sum b_k$ konverguje z Leibnizova pravidla.

Nyni se pokusme formalizovat tento intuitivni pristup. Nejprve si uvedomme, ze log je rostouci funkce, jez meni znamenko v 0. Plati tedy
$$|a_k| = (-1)^{k+1} a_k,$$

a odsud okamzite plyne, ze

$$a_k = (-1)^{k+1}(-1)^{k+1}a_k = (-1)^{k+1}|a_k|.$$

Stejne jako v uvahach na zacatku prikladu mame

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{\frac{1}{k}} = \lim_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1.$$

Odsud plynou dva fakty

(1) $\lim_{k\to\infty} |a_k| = 0$

(2) $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|b_k|} = 1.$

Z Leibnizova pravidla a (1) mame, ze rada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}|a_k|$$

konverguje. Z limitniho srovnavaciho pravidla a (2) mame, ze

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

diverguje, nebot rada

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverguje dle Vety 8.