Kapitola 5

Vektorové prostory

V předchozí kapitole jsme podstatným způsobem rozšířili naši představu o tom, co je to číslo. Nadále jsou pro nás důležité především vlastnosti operací sčítání a násobení čísel, o kterých pouze předpokládáme, že splňují podmínky Definice 4.1. Samotná čísla tak důležitá nejsou.

Podobně nyní rozšíříme pojem vektoru tak, aby jeho souřadnice mohly pocházet z libovolného tělesa $\mathbf{T}$. Následující definice bezprostředně zobecňuje Definici 1.1.

Definice 5.1 *Předpokládáme, že* $\mathbf{T}$ *je nějaké těleso.* Vektor *dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je uspořádaná* n*-tice* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *prvků tělesa* $\mathbf{T}$*. Číslo* x_i *nazýváme* i*-tá* souřadnice *tohoto vektoru. Jsou-li vektory* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *a* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *stejné dimenze* n *a nad tělesem* $\mathbf{T}$*, pak jejich* součtem *rozumíme vektor*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Součet dvou vektorů dimenze n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je tedy opět vektor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$*.*

Je-li $a \in \mathbf{T}$*, pak* součinem *prvku* a *a vektoru* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *rozumíme vektor*

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

Součin prvku $a \in \mathbf{T}$ *a vektoru dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je proto opět vektor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$*.*

Množinu všech vektorů dimenze n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *spolu s právě definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem tělesa* $\mathbf{T}$ *nazýváme* aritmetický vektorový prostor *dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Označovat jej budeme* $\mathcal{T}^n$*.*

Sčítání vektorů stejné dimenze nad tělesem $\mathbf{T}$ a jejich násobení prvky z tělesa $\mathbf{T}$ má řadu vlastností společných se sčítáním a násobením prvků tělesa $\mathbf{T}$. Můžete si to snadno ověřit v následujícím cvičení.

Cvičení 5.1 *Dokažte, že v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathcal{T}^n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ pro libovolné tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{T}^n$ a prvky $a, b \in \mathbf{T}$ platí*

1. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
3. *pro* nulový vektor $\mathbf{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n}$ *platí* $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
4. *je-li* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a označíme-li* $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ opačný vektor *k vektoru* $\mathbf{x}$, *pak platí* $(-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
5. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$,
6. $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$,
7. $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$,
8. $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$.

Pokud se vrátíte ke Cvičení 3.1, tak zjistíte, že sčítání reálných matic tvaru $m \times n$ a násobení těchto matic reálnými čísly má zcela stejné vlastnosti. Stejné vlastnosti má také sčítání matic tvaru $m \times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ a jejich násobení prvky tělesa $\mathbf{T}$.

Existuje řada dalších příkladů množin, jejichž prvky lze sčítat a násobit prvky nějakého tělesa a tyto operace mají vlastnosti vyčíslené v předchozím cvičení. Podobně jako v případě těles není důležitá konkrétní podoba prvků těchto množin, ale algebraické vlastnosti operací sčítání a násobení prvky tělesa $\mathbf{T}$. Následující důležitá definice shrnuje vlastnosti počítání s vektory a maticemi, které považujeme za důležité.

Definice 5.2 *Předpokládáme, že $\mathbf{T}$ je těleso. Dále předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je nějaká množina, na které je definovaná operace sčítání a násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathcal{V}$. Pokud tyto operace splňují následující podmínky, pak říkáme, že množina $\mathcal{V}$ spolu s těmito operacemi tvoří* vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. *Podmínky pro sčítání jsou*

(A0) *součet* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *pro libovolné prvky* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$,

(A1) *platí* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ *pro libovolné* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathcal{V}$,

(A2) *platí* $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{V}$,

(A3) *existuje prvek* $\mathbf{0}\in\mathcal{V}$ *takový, že* $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$,

(A4) *ke každému prvku* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$ *existuje prvek* $-\mathbf{x}\in\mathcal{V}$, *pro který platí, že* $(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Dále následují axiomy pro násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ *s prvky množiny* $\mathcal{V}$:

(N0) *součin* $a\mathbf{x}\in\mathcal{V}$ *pro libovolné prvky* $a\in\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$,

(N1) *platí* $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro jednotkový prvek* $1\in\mathbf{T}$ *a libovolný prvek* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$,

(N2) *platí* $a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$,

(N3) *platí* $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$,

(N4) *platí* $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$ *pro libovolný prvek* $a\in\mathbf{T}$ *a každé dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{V}$.

Prvky vektorového prostoru $\mathcal{V}$ *nazýváme také* vektory *a prvkům tělesa* $\mathbf{T}$ *v takovém případě říkáme* skaláry.

Axiomy pro sčítání prvků vektorového prostoru jsou zcela stejné jako axiomy pro sčítání v nějakém tělese. Další komentář nepotřebují. Naproti tomu axiomy pro násobení skalárů s vektory jsou zcela jiné než axiomy pro násobení prvků nějakého tělesa. Především je třeba si uvědomit, že není definován součin dvou vektorů, ale součin skaláru a vektoru (v tomto pořadí!). Součin vektoru se skalárem $\mathbf{x}a$ jsme *nedefinovali.* Proto také nemá smysl mluvit o komutativitě násobení ve vektorovém prostoru – jeden z obou součinů prostě nemá smysl. Ze stejného důvodu jsme museli uvést dva různé axiomy distributivity (N3) a (N4). Axiom asociativity násobení ve vektorovém prostoru (N2) je také třeba upravit kvůli jinému charakteru násobení ve vektorovém prostoru. A nakonec axiom (N1) říká, že jednotkový prvek tělesa $\mathbf{T}$ je neutrální vzhledem k násobení ve vektorovém prostoru.

Stejně jako v případě těles nejdříve uvedeme několik bezprostředních důsledků axiomů vektorového prostoru.

Tvrzení 5.3 *V každém vektorovém prostoru* $\mathcal{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *platí*

1. *nulový vektor* $\mathbf{0}$ *je určený jednoznačně*
2. *opačný vektor* $-\mathbf{x}$ *je určený vektorem* $\mathbf{x}$ *jednoznačně,*
3. $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$,
4. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$,
5. $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pro každý skalár* $a \in \mathbf{T}$,
6. $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$,
7. *jestliže* $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *pak buď* $a = 0$ *nebo* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Důkaz. Důkazy jsou ve stejném duchu jako důkazy jednotlivých vlastností těles v Tvrzení 4.2. Nebudeme proto uvádět pro každou rovnost ze kterého axiomu, případně dříve dokázané vlastnosti vektorových prostorů, plyne. Můžete si to v případě pochybností ověřit sami.

Vlastnosti 1, 2, 3 a 4 se dokazují úplně stejně jako vlastnosti 1, 2, 3 a 4 v Tvrzení 4.2.

Podobně jako vlastnost 4 se dokazuje také vlastnost 5: z axiomů (N4) a (A3) plyne

$$a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}.$$

Přičtením vektoru $-(a\mathbf{0})$ k oběma stranám rovnosti $a\mathbf{0} = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$ dostaneme $\mathbf{0} = a\mathbf{0}$.

6. Přímým výpočtem dostaneme (všimněte si použití axiomu (N2))

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = (-1+1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} + 1\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} + \mathbf{x}.$$

Z jednoznačnosti opačného vektoru k vektoru $\mathbf{x}$ plyne rovnost $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$.

7. Je-li $a \neq 0$, pak můžeme rovnost $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vynásobit skalárem a^{-1}. Dostaneme tak

$$\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = (a^{-1}a)\mathbf{x} = a^{-1}(a\mathbf{x}) = a^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

Aritmetický vektorový prostor $\mathcal{T}^n$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je základním příkladem vektorového prostoru. Ze Cvičení 3.1 plyne, že také množina $\mathcal{R}^{m\times n}$ reálných matic tvaru $m \times n$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic reálnými čísly je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. Podobně množina $\mathcal{T}^{m\times n}$ všech matic tvaru $m \times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic prvky tělesa $\mathbf{T}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Následují příklady vektorových prostorů, jejichž prvky nejsou ani vektory v obvyklém smyslu slova ani matice.

Příklad 5.4 *Množina* $\mathbf{R}[x]$ *všech reálných polynomů spolu s operacemi sčítání a násobení polynomů reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel* $\mathbf{R}$. *(Ověřte všechny axiomy!)*

Podobně tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ *množina* $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ *všech reálných polynomů stupně nejvýše* n *(včetně nulového polynomu) spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů reálným číslem.*

Reálná čísla v předchozích dvou odstavcích nejsou důležitá. Stejně tak můžeme uvažovat množinu $\mathbf{T}[x]$ *polynomů jedné proměnné s koeficienty v libovolném tělese* $\mathbf{T}$. *Spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa* $\mathbf{T}$ *tvoří množina* $\mathbf{T}[x]$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$.

Také množina $\mathbf{T}_{\leq n}[x]$ *všech polynomů stupně nejvýše* n *(včetně nulového polynomu) s koeficienty v tělese* $\mathbf{T}$ *tvoří s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa* $\mathbf{T}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$.

Další příklady vektorových prostorů jsou tvořené funkcemi.

Příklad 5.5 *Množina všech reálných funkcí* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *definovaných na uzavřeném intervalu* $[0,1]$ *tvoří vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *spolu s operacemi*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) = kf(x).$$

Se stejně definovanými operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ *také množina všech* spojitých *reálných funkcí definovaných na intervalu* $[0,1]$.

Další vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ *tvoří množina všech* diferencovatelných *funkcí* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *spolu se stejnými operacemi jako v předchozích dvou odstavcích. (Ověřte si ve všech třech případech platnost všech axiomů vektorového prostoru.)*

Každá diferencovatelná funkce $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ je spojitá na celém intervalu $[0,1]$. Množina všech diferencovatelných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$ je tak podmnožinou množiny spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$. Součet$f+g$ dvou diferencovatelných funkcí $f,g : [0,1] \to \mathbf{R}$ nezávisí na tom, sčítáme-li je jako diferencovatelné funkce nebo jako spojité funkce. Důležité ale je, že jsou-li f,g diferencovatelné, pak také jejich součet $f+g$ je diferencovatelná funkce. Podobně ani součin kf reálného čísla k s diferencovatelnou funkcí f nezávisí na tom, považujeme-li f za diferencovatelnou funkci nebo za spojitou. Podstatné je, že součin kf je diferencovatelná funkce, pokud je f diferencovatelná funkce.

Prostor diferencovatelných reálných funkcí definovaných na intervalu $[0,1]$ je obsažený v prostoru spojitých funkcí na $[0,1]$ nejen ve smyslu inkluze, ale také tím, že se v něm počítá s diferencovatelnými funkcemi stejně, jako bychom s nimi počítali ve větším prostoru spojitých funkcí. Tento vztah mezi dvěma vektorovými prostory nad stejným tělesem je důležitý a je obsahem následující definice.

Definice 5.6 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Je-li neprázdná množina $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ spolu s operacemi definovanými v prostoru $\mathcal{V}$, tj. splňuje-li axiomy (A0)-(A4) a (N0)-(N4), pak říkáme, že prostor $\mathcal{U}$ je* podprostorem *prostoru $\mathcal{V}$.*

Ve skutečnosti není nutné ověřovat platnost všech 10 axiomů vektorového prostoru pro operace definované na podmnožině $\mathcal{U}$.

Úloha 5.1 *Neprázdná podmnožina $\mathcal{U}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ spolu s operacemi definovanými v prostoru $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$ právě když splňuje oba axiomy uzavřenosti (A0) a (N0). Dokažte.*

Řešení. Pokud je $\mathcal{U}$ podprostor prostoru $\mathcal{V}$, musí splňovat *všechny* axiomy vektorového prostoru, nejen (A0) a (N0).

Naopak, pokud $\mathcal{U}$ splňuje oba axiomy uzavřenosti, vezmeme libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ (množina $\mathcal{U}$ je neprázdná!). Podle axiomu (N0) také $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Proto podle axiomu (A0) platí také $\mathbf{0} = -\mathbf{x} + \mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Operace sčítání na množině $\mathcal{U}$ tak splňuje axiomy (A3) a (A4). Asociativita (A1) a komutativita (A2) platí proto, že operace sčítání prvků množiny $\mathcal{U}$ se shoduje s operací sčítání těchto prvků v prostoru $\mathcal{V}$, která komutativní a asociativní je.

Ze stejného důvodu platí pro operaci násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathcal{U}$ všechny axiomy (N1)-(N4). $\square$

Každý vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ má určitě dva podprostory. Jenodprvkový podprostor $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$ a celý prostor $\mathcal{V}$. Těmto podprostorům říkáme *triviální* podprostory.

Úloha 5.2 *Najděte všechny podprostory aritmetického reálného prostoru $\mathcal{R}^2$.*

Řešení. Pro každý nenulový vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ označíme symbolem $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ množinu $\{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$. Snadno ověříme, že množina $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ splňuje oba axiomy uzavřenosti a určuje tak podprostor prostoru $\mathcal{R}^2$.

Nyní budeme uvažovat podprostor $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ a vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \notin \mathcal{L}(\mathbf{a})$. To znamená, že $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ pro libovolné reálné číslo k. Pro jakýkoliv vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathcal{R}^2$ uvažujeme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Z předpokladu $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ vyplývá, že (sloupcová) hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

této soustavy se rovná 2, protože hodnost této matice a matice k ní transponované se rovnají podle Tvrzení 3.15. Soustava má proto jednoznačné řešení. Existují tedy reálná čísla x, y, pro která platí

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Každý podprostor prostoru $\mathcal{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ musí obsahovat vektory $x\mathbf{a}$ a $y\mathbf{b}$ vzhledem k axiomu uzavřenosti (N0) a kvůli axiomu uzavřenosti na sčítání (A0) také vektor $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Každý podprostor prostoru $\mathcal{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b} \notin \mathcal{L}(\mathbf{a})$ se proto rovná celému prostoru $\mathcal{R}^2$. Kromě triviálních podprostorů $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathcal{R}^2$ jsou tak podprostory $\mathcal{L}(\mathbf{a}) = \{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$ jedinými netriviálními podprostory $\mathcal{R}^2$. $\square$

Každý podprostor $\mathcal{L}(\mathbf{a}) = \{k\mathbf{a} : k \in \mathbf{R}\}$ je přímka procházející počátkem. Podobně jako v předchozí úloze můžete vyřešit následující cvičení.

Cvičení 5.2 *Dokažte, že netriviální podprostory třídimenzionálního reálného aritmetického prostoru jsou přímky a roviny procházející počátkem.*

Cvičení 5.3 *Těleso reálných čísel lze v předchozí úloze a cvičení bez problémů nahradit obecným tělesem* $\mathbf{T}$. *Najděte všechny netriviální podprostory aritmetických vektorových prostorů* $\mathcal{T}^2$ *a* $\mathcal{T}^3$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$.

Nyní se vrátíme k Úloze 5.2 a budeme se zabývat tam zjištěným faktem, že každý podprostor $\mathcal{R}^2$ obsahující dva vektory $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{b} \notin \mathcal{L}\mathbf{a}$ se už musí rovnat celému prostoru $\mathcal{R}^2$. Tuto skutečnost vyjadřujeme slovy, že vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *generují* prostor $\mathcal{R}^2$. Abychom mohli pojem "generuje" definovat obecně, dokážeme v následující úloze dva bezprostřední důsledky definice podprostoru vektorového prostoru.

Úloha 5.3 *Předpokládáme, že* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Dokažte, že*

- *průnik libovolných podprostorů $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, prostoru $\mathcal{V}$ je opět podprostor prostoru $\mathcal{V}$,*

- *pro každou podmnožinu $X \subseteq \mathcal{V}$ existuje nejmenší (vzhledem k inkluzi) podprostor prostoru $\mathcal{V}$ obsahující množinu X.*

Řešení. Označíme si
$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$
Abychom dokázali, že $\mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{V}$, potřebujeme podle Úlohy 5.1 ověřit, že množina $\mathcal{U}$ splňuje oba axiomy uzavřenosti (A0) a (N0).Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ dva vektory, pak $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}_i$ pro každé $i \in I$. Každá množina $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, je podprostor $\mathcal{V}$, splňuje proto axiom uzavřenosti (A0), proto také $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{U}_i$ pro každé $i \in I$. Tudíž $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{U}$.

Zcela stejně se dokáže také uzavřenost množiny $\mathcal{U}$ na násobení skaláry. Je-li $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, pak $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_i$ pro každé $i \in I$. Je-li $a \in \mathbf{T}$, pak také $a\mathbf{x} \in \mathcal{U}_i$ pro každé $i \in I$, proto rovněž $a\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Množina $\mathcal{U}$ tak splňuje oba axiomy uzavřenosti (A0) a (N0) a je tedy podprostor prostoru $\mathcal{V}$.

Je-li nyní X libovolná podmnožina prostoru $\mathcal{V}$, označíme $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ množinu všech podprostorů $\mathcal{V}$ obsahujících množinu X. Právě jsme dokázali, že
$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$$
je také podprostor $\mathcal{V}$ a zřejmě $X \subseteq \mathcal{U}$. Každý podprostor $\mathcal{V}$ obsahující množinu X se rovná podprostoru $\mathcal{U}_i$ pro nějaké $i \in I$, proto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_i$. Podprostor $\mathcal{U}$ je tedy nejmenší podprostor (vzhledem k inluzi) obsahující množinu X. $\square$

Definice 5.7 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Je-li $X \subseteq \mathcal{V}$, pak nejmenší podprostor $\mathcal{V}$ obsahující množinu X, jehož existenci jsme dokázali v Úloze 5.3, nazýváme* lineární obal *množiny X a označujeme jej $\mathcal{L}(X)$. Říkáme také, že množina X* generuje *podprostor $\mathcal{L}(X)$ nebo že podprostor $\mathcal{L}(X)$ je* generovaný *množinou X. Je-li $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konečná množina, pak místo $\mathcal{L}(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\})$ budeme psát $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.*

Zavedené označení lineárního obalu množiny X je v souladu s dříve používaným označením $\mathcal{L}(\mathbf{a}) = \{k\mathbf{a} : k \in \mathbf{R}\}$, neboť tato množina je zřejmě podprostor prostoru $\mathcal{R}^2$ a každý podprostor $\mathcal{R}^2$ obsahující vektor $\mathbf{a}$ musí podle axiomu (N0) obsahovat všechny vektory $k\mathbf{a}$ pro $k \in \mathbf{R}$ a tedy celou množinu $\{k\mathbf{a} : k \in \mathbf{R}\}$. Všimněte si také, že každý podprostor prostoru $\mathcal{V}$ musí obsahovat nulový vektor $\mathbf{0}$ a proto $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Následující tvrzení udává "vnitřní" popis lineárního obalu $\mathcal{L}(X)$ množiny X.

Tvrzení 5.8 *Je-li X podmnožina vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak platí*

$$\mathcal{L}(X) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i : n \geq 0, a_i \in \mathbf{T}, \mathbf{x}_i \in X \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Množina na pravé straně rovnosti je množina všech možných lineárních kombinací prvků množiny X. Aby rovnost platila také pro prázdnou množinu X, musíme považovat prázdný součet za rovný $\mathbf{0}$.

Důkaz. Množinu na pravé straně rovnosti si označíme $\mathcal{U}$. Dokážeme napřed, že $\mathcal{U}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$. Snazší je dokázat uzavřenost na násobení skaláry. Je-li totiž

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i \in \mathcal{U},$$

pak také

$$k\mathbf{x} = k\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n}(ka_i)\mathbf{x}_i \in \mathcal{U}.$$

Je-li dále

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} b_j\mathbf{y}_j$$

další prvek množiny $\mathcal{U}$, můžeme v případě potřeby přidat k oběma vyjádřením vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ další vektory s nulovými koeficienty tak, aby oba vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ byly lineární kombinací stejných vektorů $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_p\} \subseteq X$:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{p} c_k\mathbf{z}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{p} d_k\mathbf{z}_k.$$

Potom

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{p}(c_k + d_k)\mathbf{z}_k.$$

Množina $\mathcal{U}$ je tedy podprostor prostoru $\mathcal{V}$.

Zbývá dokázat, že $\mathcal{U}$ je *nejmenší* podprostor prostoru $\mathcal{V}$ obsahující množinu X. Je-li $\mathcal{W} \supseteq X$ libovolný podprostor $\mathcal{V}$ a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{U},$$

pak podle definice množiny $\mathcal{U}$ platí $\mathbf{x}_i \in X \subseteq \mathcal{W}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Proto také $a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{W}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ (axiom (N0)). Vzhledem k axiomu uzavřenosti (A0) pak také

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{W}.$$

Proto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ pro každý podprostor $\mathcal{W}$ prostoru $\mathcal{V}$ obsahující množinu X. Protože už víme, že $\mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{V}$, dokázali jsme tak $\mathcal{L}(X) = \mathcal{U}$. □

V případě, že je množina X konečná, tj. $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, pak můžeme lineární obal X vyjádřit jednodušeji.

Důsledek 5.9 *Pokud je* $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, *pak*

$$\mathcal{L}(X) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i : a_i \in \mathbf{T}\}.$$

Důkaz. Označme si

$$\mathcal{U} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i : a_i \in \mathbf{T}\}.$$

Podle Tvrzení 5.8 platí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}(X)$. Zbývá dokázat opačnou inkluzi a tu dokážeme tím, že se přesvědčíme, že $\mathcal{U}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$. To je ale snadné. Pokud

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{U} \quad \text{a} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{U},$$

pak také

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{U} \quad \text{a} \quad k\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (ka_i) \mathbf{x}_i \in \mathcal{U}$$

pro libovolný prvek $k \in \mathbf{T}$. □

Podprostory určené maticí

Každá matice určuje čtyři podprostory vhodných aritmetických vektorových prostorů.

Definice 5.10 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$*, pak* sloupcový prostor *matice* $\mathbf{A}$ *je lineární obal*

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*n}) \subseteq \mathcal{T}^m$$

sloupcových vektorů matice $\mathbf{A}$*.*

Řádkový prostor *matice* $\mathbf{A}$ *je lineární obal*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}_{1*}, \mathbf{A}_{2*}, \ldots, \mathbf{A}_{m*}) \subseteq \mathcal{T}^n$$

řádkových vektorů matice $\mathbf{A}$*.*

Následující jednoduché tvrzení udává ekvivalentní popis sloupcového a řádkového prostoru matice.

Tvrzení 5.11 *Pro matici* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *platí*

- $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathcal{T}^n\}$,
- $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y}^T\mathbf{A} : \mathbf{y} \in \mathcal{T}^m\}$.

Důkaz. Obě tvrzení jsou jednoduchá a jsou přímým důsledkem definic.

Je-li $\mathbf{z} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, pak existují podle Důsledku 5.9 skaláry $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{T}$, pro které platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{A}_{*i}.$$

Označíme-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{T}^n$, pak

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{A}_{*k} = \mathbf{Ax}$$

podle Tvrzení 3.7.

Všechny implikace v předchozí části důkazu můžeme obrátit. Pokud $\mathbf{z} = \mathbf{Ax}^T$ pro nějaký vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{T}^n$, pak podle Tvrzení 3.7 platí

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ax}^T = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{A}_{*j},$$

tj. $\mathbf{z} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ podle Důsledku 5.9.

Druhou část tvrzení dokážeme zcela stejně. Platí

$$\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

právě když existují prvky $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbf{T}$ takové, že

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{m} y_m \mathbf{A}_{j*}.$$

Označíme-li $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T \in \mathcal{T}^m$, pak podle Tvrzení 3.7

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{A}_{j*} = \mathbf{y}^T \mathbf{A}.$$

□

Další dva podprostory určené maticí $\mathbf{A}$ závisí na následujícím tvrzení.

Tvrzení 5.12 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$*, pak platí*

- *množina* $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{T}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ *je podprostor prostoru* $\mathcal{T}^n$*,*
- *množina* $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{T}^m : \mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}\}$ *je podprostor prostoru* $\mathcal{T}^m$*.*

Důkaz. Obě tvrzení jsou opět snadná. Dokážeme pouze první z nich. Potřebujeme dokázat, že množina $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{T}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ splňuje oba axiomy uzavřenosti (A0) a (N0). Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, pak platí $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Protože násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání podle Tvrzení 3.5, platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Rovněž

$$\mathbf{A}(k\mathbf{x}) = k(\mathbf{A}\mathbf{x}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

podle Cvičení 3.6.

Druhá část tvrzení se dokáže zcela stejně. □

Definice 5.13 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$*, pak podprostor* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ *prostoru* $\mathcal{T}^n$ *nazýváme* (pravý) nulový prostor *matice* $\mathbf{A}$*. Podprostor* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *prostoru* $\mathcal{T}^m$ *nazýváme* levý nulový prostor *matice* $\mathbf{A}$*.*

Následující cvičení je snadným důsledkem poslední části Věty 2.5.

Cvičení 5.4 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$*, pak platí*

- $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ *právě když pro hodnost matice* $\mathbf{A}$ *platí* $r(\mathbf{A}) = n$*,*
- $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ *právě když pro hodnost matice* $\mathbf{A}$ *platí* $r(\mathbf{A}) = m$*.*