Kapitola 6

Lineární (ne)závislost

Také tuto kapitolu zahájíme základní definicí.

Definice 6.1 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Říkáme, že posloupnost vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ je* lineárně nezávislá, *jestliže z rovnosti*

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

plyne, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. V opačném případě říkáme, že posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně závislá.

Je důležité uvědomit si explicitně, co znamená, že posloupnost vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ není lineárně nezávislá, tj. že je lineárně závislá. Znamená to, že existují skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$, z nichž aspoň jeden je nenulový, a pro které platí

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Úloha 6.1 *Dokažte, že pro každou regulární matici $\mathbf{P}$ řádu n s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ je posloupnost sloupcových vektorů*

$$\mathbf{P}_{*1}, \mathbf{P}_{*2}, \ldots, \mathbf{P}_{*n}$$

lineárně nezávislá v aritmetickém n-dimenzionálním prostoru $\mathcal{T}^n$.

Řešení. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$ libovolné skaláry, pro které platí

$$a_1\mathbf{P}_{*1} + a_2\mathbf{P}_{*2} + \cdots + a_n\mathbf{P}_{*n} = \mathbf{0},$$

označíme $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ sloupcový vektor těchto skalárů. Tento vektor je řešením homogenní soustavy rovnic $\mathbf{Px} = \mathbf{0}$. Protože matice $\mathbf{P}$ této soustavy je regulární, má soustava pouze nulové řešení podle Věty 2.5. Proto $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. $\square$

Cvičení 6.1 *Je posloupnost vektorů* $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T \in \mathcal{R}^3$ *lineárně závislá nebo nezávislá? Může se na tomto faktu změnit něco tím, že považujeme posloupnost* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *za posloupnost vektorů z aritmetického prostoru* $\mathcal{T}^3$ *nad libovolným tělesem* $\mathbf{T}$*? Prozkoumejte lineární závislost nebo nezávislost několika dalších posloupností vektorů z* $\mathcal{R}^3$*. Může být nějaká posloupnost čtyř vektorů z* $\mathcal{R}^3$ *lineárně nezávislá?*

Cvičení 6.2 *Dokažte, že pro každou regulární matici* $\mathbf{P}$ *řádu* n *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *je posloupnost řádkových vektorů*

$$\mathbf{P}_{1*}, \mathbf{P}_{2*}, \ldots, \mathbf{P}_{n*}$$

lineárně nezávislá.

Také následující cvičení je jednoduché a plyne bezprostředně z definice.

Cvičení 6.3 *Dokažte, že posloupnost vektorů* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ *je lineárně závislá, pokud*

- *obsahuje nějaký nulový vektor* $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$,
- *obsahuje dva stejné vektory* $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ *pro* $i \neq j$.

Jaké koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *stačí zvolit v obou případech?*

Druhé tvrzení v posledním cvičení říká, že v lineárně nezávislé posloupnosti vektorů jsou všechny prvky navzájem různé. Protože sčítání vektorů ve vektorovém prostoru je komutativní, plyne z lineární nezávislosti posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineární nezávislost jakékoliv posloupnosti $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_n}$, kterou dostaneme z posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ přeházením pořadí jejich prvků. Jinak řečeno, indexy $i_1, i_2, \ldots, i_n$ jsou navzájem různé prvky množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. To znamená, že lineární nezávislost posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ závisí pouze na prvcích této posloupnosti, nikoliv na jejich pořadí. To vede k následující definici.

Definice 6.2 *Předpokládáme, že* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Množina* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ *je* lineárně nezávislá, *jestliže z rovnosti*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

plyne $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$*. Říkáme, že množina* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *je* lineárně závislá, *pokud není lineárně nezávislá. Nekonečná množina* $X \subseteq \mathcal{V}$ *je* lineárně nezávislá, *je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá. V opačném případě je* lineárně závislá.

Cvičení 6.4 *Najděte nějakou nekonečnou lineárně nezávislou podmnožinu prostoru všech polynomů s reálnými koeficienty. Najděte nějakou nekonečnou lineárně nezávislou podmnožinu prostoru všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu* $[0,1]$. *Můžete najít nekonečnou lineárně nezávislou podmnožinu v prostoru všech diferencovatelných funkcí na intervalu* $[0,1]$*?*

Úloha 6.2 *Předpokládáme, že* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Dokažte, že platí*

- *je-li* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineárně nezávislá posloupnost vektorů z* $\mathcal{V}$ *a* $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, *pak podposloupnost* $\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ *posloupnosti* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je také lineárně nezávislá,*

- *je-li naopak* $\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{j_k}$ *lineárně závislá podposloupnost posloupnosti* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, *pak je také posloupnost* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineárně závislá,*

- *je-li* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *lineárně nezávislá posloupnost a* $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, *pak posloupnost* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ *je lineárně závislá právě když platí* $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Řešení. Pokud jde o první tvrzení, je-li

$$a_{j_1}\mathbf{x}_{j_1} + a_{j_2}\mathbf{x}_{j_2} + \cdots + a_{j_k}\mathbf{x}_{j_k} = \mathbf{0},$$

položíme $a_i = 0$ pro $i \neq j_1, j_2, \ldots, j_k$. Potom platí také

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Z lineární nezávislosti posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ plyne $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, speciálně tedy také $a_{j_1} = a_{j_2} = \cdots = a_{j_k} = 0$.

Druhé tvrzení plyne bezprostředně z prvního.

Třetí tvrzení vyžaduje dokázat dvě implikace. Pokud je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ lineárně závislá, existují prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbf{T}$, které nejsou všechny rovné 0, a pro které platí

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n + b\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Protože posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislá, musí být $b \neq 0$. Vektor $\mathbf{y}$ tak můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{y} = (-a_1/b)\mathbf{x}_1 - (a_2/b)\mathbf{x}_2 - \cdots - (a_n/b)\mathbf{x}_n.$$

Podle Důsledku 5.9 platí, že $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Je-li naopak $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$, existují podle stejného Důsledku 5.9 skaláry $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{T}$, pro které platí

$$\mathbf{y} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n.$$

Potom ale

$$b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n + (-1)\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Protože v této lineární kombinaci nejsou všechny koeficienty rovné 0, je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}$ lineárně závislá. □

Zcela stejně dokážeme podobné vlastnosti lineární (ne)závislosti množin.

Cvičení 6.5 *Dokažte, že ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ platí*

- *podmnožina lineárně nezávislé množiny $X \subseteq \mathcal{V}$ je lineárně nezávislá,*
- *je-li $Y \subseteq X \subseteq \mathcal{V}$ a Y je lineárně závislá množina, pak také X je lineárně závislá,*
- *je-li $X \subseteq \mathcal{V}$ lineárně nezávislá množina a $\mathbf{y} \in \mathcal{V} \setminus X$, pak je množina $X \cup \{\mathbf{y}\}$ lineárně nezávislá právě když $\mathbf{y} \notin \mathcal{L}(X)$.*

Všimněte si, že nikde nepředpokládáme, že množiny X, Y jsou konečné.

Pro porozumění následujícího tvrzení je dobré si znovu připomenout Definici 3.6.

Tvrzení 6.3 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ jsou libovolné vektory. Následující tvrzení jsou ekvivalentní*

1. *posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně závislá,*
2. *existuje vektor $\mathbf{x}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{x}_i$, $i \neq j$,*
3. *existuje vektor $\mathbf{x}_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{x}_i$, $i < k$.*

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$. Je-li posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislá, existují skaláry $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$, pro které platí

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

a aspoň jeden z nich je různý od 0. Nechť je to skalár a_j. Potom

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i \neq j} (-a_i/a_j)\mathbf{x}_i,$$

což dokazuje, že $\mathbf{x}_j$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_i$, $i \neq j$.

2 $\Rightarrow$ 3. Je-li vektor $\mathbf{x}_j$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_i$, $i \neq j$, existují skaláry b_i, $i \neq j$, pro které platí

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i \neq j} b_i \mathbf{x}_i.$$

Označíme-li $b_j = -1$, dostaneme rovnost

$$b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Je-li k největší index takový, že $b_k \neq 0$, potom

$$\mathbf{x}_k = (-b_1/b_k)\mathbf{x}_1 + (-b_2/b_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + (-b_{k-1}/b_k)\mathbf{x}_{k-1}.$$

Aspoň jeden takový index k existuje, neboť $b_j = -1$. Vektor $\mathbf{x}_k$ je tak lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_i$ pro $i < k$.

3 $\Rightarrow$ 1. Pokud je vektor $\mathbf{x}_k$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_i$, $i < k$, existují skaláry $c_1, \ldots, c_{k-1}$, pro které platí

$$\mathbf{x}_k = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots c_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}.$$

Potom

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + (-1)\mathbf{x}_k + 0\mathbf{x}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

proto je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislá. $\square$

Následující tvrzení bývá často nazýváno **Steinitzova věta o výměně.**

Tvrzení 6.4 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ je lineárně nezávislá posloupnost vektorů. Je-li $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$, pak existuje vektor $\mathbf{x}_k$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že posloupnost*

$$\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$$

je lineárně nezávislá a

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Důkaz. Podle Tvrzení 6.3 je posloupnost vektorů

$$\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$$

lineárně závislá, neboť jeden její prvek – vektor $\mathbf{y}$ – je lineární kombinací ostatních vektorů v posloupnosti, vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Podle téhož Tvrzení 6.3 existuje vektor této posloupnosti, který je lineárně závislý na předchozích vektorech. Kvůli předpokladu $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ to nemůže být vektor $\mathbf{y}$. Je to tedy nějaký vektor $\mathbf{x}_k$ pro $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Platí proto

$$\mathbf{x}_k = a_0\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\mathbf{x}_i$$

pro nějaké skaláry $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbf{T}$. Posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislá, proto podle téhož Tvrzení 6.3 vektor $\mathbf{x}_k$ **není** lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$. Proto musí být $a_0 \neq 0$. Z poslední rovnosti proto můžeme vyjádřit

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k-1}(-a_i a_0^{-1})\mathbf{x}_i + a_0^{-1}\mathbf{x}_k.$$

Abychom dokázali, že posloupnost $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislá, uvažujeme libovolné skaláry $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_n$, pro které platí

$$b_0\mathbf{y} + \sum_{j \neq k} b_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Za vektor $\mathbf{y}$ dosadíme předchozí vyjádření a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-b_0 a_i a_0^{-1})\mathbf{x}_i + b_0 a_0^{-1}\mathbf{x}_k + \sum_{j \neq k} b_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0},$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-b_0 a_i a_0^{-1} + b_i)\mathbf{x}_i + b_0 a_0^{-1}\mathbf{x}_k + \sum_{j=k+1}^{n} b_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Z lineární nezávislosti posloupnosti $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ vyplývá, že platí $b_0 = b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$ a po dosazení za b_0 do koeficientů u $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ rovněž $b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$. Tím je dokázáno, že také posloupnost $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislá.

Zbývá dokázat rovnost

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Protože $\mathbf{y}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, platí

$$\{\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

a proto také

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Opačnou inkluzi dokážeme zcela stejně. Protože

$$\mathbf{x}_k = a_0\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\mathbf{x}_i,$$

platí

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

a proto také

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

□

Důsledek 6.5 *Je-li $X \subseteq \mathcal{V}$ konečná a lineárně nezávislá, a $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathcal{L}(X)$, pak existuje vektor $\mathbf{x} \in X$, pro který platí, že množina $(X \setminus \{\mathbf{x}\}) \cup \{\mathbf{y}\}$ je také lineárně nezávislá a*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}((X \setminus \{\mathbf{x}\}) \cup \{\mathbf{y}\}).$$

Steinitzovu větu o výměně budeme používat pro zkoumání vztahů mezi různými lineárně nezávislými posloupnostmi a množinami ve vektorových prostorech.

Definice 6.6 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Posloupnost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ se nazývá* báze *prostoru $\mathcal{V}$, je-li lineárně nezávislá a současně $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{V}$. Prostor $\mathcal{V}$ se nazývá* konečně-dimenzionální, *pokud v něm existuje konečná báze.*

Nekonečná množina $X \subseteq \mathcal{V}$ se nazývá báze *prostoru $\mathcal{V}$, je-li lineárně nezávislá a současně generuje celý prostor $\mathcal{V}$, tj. $\mathcal{L}(X) = \mathcal{V}$.*

Cvičení 6.6 *Dokažte, že posloupnost vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathcal{T}^n$, kde vektor $\mathbf{e}_i$ má všechny souřadnice 0 s výjimkou i-té souřadnice, která se rovná 1, je báze v prostoru $\mathcal{T}^n$. Této bázi se říká* standardní báze *v $\mathcal{T}^n$.*

Najděte nějakou bázi v prostoru $\mathbf{R}[x]$ reálných polynomů jedné proměnné. Najděte nějakou bázi v prostoru $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$. Kolik má prvků?

Existuje báze v nulovém prostoru $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$?

Uměli byste najít nějakou bázi v prostoru všech reálných funkcí definovaných na intervalu $[0, 1]$?

Lineární algebra se zabývá především konečně-dimenzionálními vektorovými prostory. Nekonečně-dimenzionální prostory jsou zkoumány ve *funkcionální analýze*. Proto budeme v následujícím textu prakticky vždy předpokládat, že $\mathcal{V}$ je konečně-dimenzionální vektorový prostor nad nějakým tělesem $\mathbf{T}$.

Tvrzení 6.7 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je konečně-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je nějaká báze ve $\mathcal{V}$. Jestliže je posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ lineárně nezávislá ve $\mathcal{V}$, pak $m \leq n$, a pokud $m < n$, pak můžeme rozšířit posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ do báze připojením nějakých prvků báze $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.*

Libovolné dvě báze v prostoru $\mathcal{V}$ mají stejný počet prvků.

Důkaz. Obě posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ jsou lineárně nezávislé. Naproti tomu posloupnost

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$$

je lineárně závislá podle Tvrzení 6.3, protože $\mathbf{y}_m \in \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. V této posloupnosti tedy existuje nějaký vektor, který je lineární kombinací předcházejících vektorů. Protože je $\mathbf{y}_m \neq \mathbf{0}$ (neboť $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ je lineárně nezávislá posloupnost a nemůže proto obsahovat vektor $\mathbf{0}$), existuje podle Steinitzovy věty o výměně, tj. podle Tvrzení 6.4, vektor $\mathbf{x}_k$ takový, že posloupnost

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$$

je lineárně nezávislá a

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{V}.$$

Posloupnost $\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ je tedy rovněž báze prostoru $\mathcal{V}$ a můžeme celý postup znovu opakovat s posloupností

$$\mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n.$$

Tato posloupnost je opět lineárně závislá, neboť

$$\mathbf{y}_{m-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{V}.$$

Existuje v ní proto vektor, který je lineární kombinací předchozích vektorů. Nemůže to být žádný z vektorů $\mathbf{y}_{m-1}$ a $\mathbf{y}_m$, protože posloupnost $\mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{y}_m$ je lineárně nezávislá coby podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$. Musí to tedy být jeden z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Ten můžeme v bázi $\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ nahradit vektorem $\mathbf{y}_{m-1}$ a dostaneme tak novou bázi, jejíž první dva prvky jsou $\mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{y}_m$ a zbývajících $n-2$ prvků pochází z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Opakujeme tento postup vždy tak, že před bázi získanou v předchozím kroku připíšeme další vektor $\mathbf{y}_i$. Formální důkaz bychom udělali indukcí podle m.

Nemůžeme dříve vyčerpat posloupnost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ než vyčerpáme posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Kdyby totiž bylo $m > n$, dostali bychom po n krocích předchozího postupu bázi $\mathbf{y}_{m-n+1}, \ldots, \mathbf{y}_m$ a vektor $\mathbf{y}_1$ by tak byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{y}_{m-n+1}, \ldots, \mathbf{y}_m$, což je spor s lineární nezávislostí posloupnosti $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Tím je dokázáno, že $m \leq n$, a pokud $m < n$, tak potom dostaneme po m krocích předchozího důkazu bázi

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_{n-m}}.$$

Jsou-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ dvě báze prostoru $\mathcal{V}$, pak je podle předchozího odstavce $m \leq n$, neboť posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ je lineárně nezávislá. Ze stejného důvodu (také posloupnost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislá) platí rovněž $n \leq m$. Tím je rovnost $m = n$ dokázána. $\Box$

Poslední tvrzení ospravedlňuje následující definici.

Definice 6.8 *Je-li $\mathcal{V}$ konečně-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak počet prvků libovolné báze prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme* dimenze *prostoru $\mathcal{V}$ a označujeme jej* $\dim \mathcal{V}$.

Cvičení 6.7 *Jaká je dimenze aritmetického vektorového prostoru $\mathcal{T}^n$ nad tělesem $\mathbf{T}$?*

Jaká je dimenze nulového prostoru $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$?

Jaká je dimenze prostoru reálných polynomů $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ stupně nejvýše n?

Má prostor všech reálných polynomů jedné proměnné $\mathbf{R}[x]$ konečnou dimenzi? Pokud ano, čemu se rovná?

Nejdříve si dokážeme několik jednoduchých vlastností vektorových prostorů dimenze n.

Tvrzení 6.9 *Předpokládáme, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom*

- *každá lineárně nezávislá posloupnost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ prvků $\mathcal{V}$ je báze prostoru $\mathcal{V}$,*

- *každá posloupnost* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ *prvků* $\mathcal{V}$*, pro kterou platí* $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) = \mathcal{V}$*, je báze* $\mathcal{V}$*.*

Důkaz. První tvrzení dokážeme tím, že ukážeme platnost rovnosti množin $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{V}$. Určitě platí $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{V}$. Kdyby byly množiny $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ a $\mathcal{V}$ různé, vzali bychom libovolný vektor $\mathbf{z} \in \mathcal{V} \backslash \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Podle třetí části Úlohy 6.2 je posloupnost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{z}$ lineárně nezávislá. To je ve sporu s Tvrzením 6.7, které říká, že každá lineárně nezávislá posloupnost v prostoru dimenze n má nejvýše n prvků. Proto platí rovnost $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{V}$.

Abychom dokázali druhou část tvrzení, musíme ukázat, že posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ je lineárně nezávislá. Opět budeme pokračovat sporem. Kdyby byla lineárně závislá, existoval by podle Tvrzení 6.3 vektor $\mathbf{y}_k$, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}$. Potom platí

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n).$$

Inkluze $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)$ je zřejmá. Opačná inkluze plyne z toho, že $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n)$. Kdyby byla posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislá, byla by bází prostoru $\mathcal{V}$, která by měla méně než n prvků, což je spor s Tvrzením 6.7.

Zbývá možnost, že ani posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ není lineárně nezávislá. Potom můžeme celý postup opakovat. Najdeme vektor $\mathbf{y}_j$, který je lineární kombinací předcházejících vektorů. Ten můžeme z posloupnosti vyhodit a zbylá posloupnost bude stále generovat celý prostor $\mathcal{V}$. Je-li navíc lineárně nezávislá, je to báze prostoru $\mathcal{V}$, která má $n - 2$ prvků, opět spor s druhou částí Tvrzení 6.7. Pokud je lineárně závislá, celý postup znovu opakujeme.

Po několika krocích nakonec dostaneme lineárně nezávislou podposloupnost posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$, která má méně než n prvků a stále ještě generuje celý prostor $\mathcal{V}$. To je znovu spor s Tvrzením 6.7. To, že postupným vyškrtáváním vektorů z posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ musíme nakonec dostat nějakou lineárně nezávislou posloupnost, vyplývá z toho, že prázdná posloupnost je lineárně nezávislá. $\square$

Následující věta je intuitivně zřejmá, je ale nutné ji dokázat.

Věta 6.10 *Předpokládáme, že* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *je podprostor prostoru* $\mathcal{V}$*. Potom je prostor* $\mathcal{U}$ *také konečně-dimenzionální a* $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{V}$*.*

Důkaz. Je-li $\mathcal{U} = \{\mathbf{0}\}$, potom prázdná množina $\emptyset$ je báze $\mathcal{U}$ a $\dim \mathcal{U} = 0 \leq \dim \mathcal{V}$. Pokud je $\mathcal{U} \neq \{\mathbf{0}\}$, existuje nenulový vektor $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{U}$. Posloupnost $\mathbf{y}_1$ je lineárně nezávislá a pokud je $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1) = \mathcal{U}$, je to báze podprostoru $\mathcal{U}$. Proto $\dim \mathcal{U} = 1 \leq \dim \mathcal{V}$ podle Tvrzení 6.7, neboť posloupnost $\mathbf{y}_1$ je lineárně nezávislá také v prostoru $\mathcal{V}$.

Pokud je $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1) \neq \mathcal{U}$, existuje vektor $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{L}(\mathbf{y}_1)$. Posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ je lineárně nezávislá jak v $\mathcal{U}$ tak i v celém prostoru $\mathcal{V}$ podle Tvrzení 6.3. Je-li $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathcal{U}$, je to báze $\mathcal{U}$ a $\dim \mathcal{U} = 2 \leq \dim \mathcal{V}$ podle Tvrzení 6.7.

Je-li $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \neq \mathcal{U}$, existuje vektor $\mathbf{y}_3 \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, atd. Pokud jsme již pro nějaké $k \leq \dim \mathcal{V} = n$ sestrojili lineárně nezávislou posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ prvků podprostoru $\mathcal{U}$ a stále $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) \neq \mathcal{U}$, vezmeme libovolný vektor $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$. Posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}$ je potom opět lineárně nezávislá podle Tvrzení 6.3. Proto rovněž $k + 1 \leq \dim \mathcal{V} = n$ podle Tvrzení 6.7.

Proto musí existovat $k \leq n$, pro které platí $\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k) = \mathcal{U}$. V takovém případě je $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ báze prostoru $\mathcal{U}$, prostor $\mathcal{U}$ má konečnou dimenzi a platí $\dim \mathcal{U} \leq \dim \mathcal{V}$. $\square$

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Začneme jednoduchou úlohou.

Úloha 6.3 *Předpokládáme, že $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$. Zvolíme libovolný prvek $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$. Jsou-li*

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$

a

$$\mathbf{z} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n$$

dvě vyjádření vektoru $\mathbf{z}$ jako lineární kombinace prvků báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, potom $a_i = b_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Řešení. Odečteme-li obě vyjádření, dostaneme

$$\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{x}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{x}_n.$$

Protože je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislá, platí $a_i - b_i = 0$, tj. $a_i = b_i$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

V důsledku předchozí úlohy jsme oprávněni přijmout následující definici.

Definice 6.11 *Je-li* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a*

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$$

vyjádření vektoru $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$ *jako lineární kombinace prvků báze* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, *pak vektor* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ *nazýváme* souřadnice vektoru $\mathbf{z}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Cvičení 6.8 *Zvolte několik bází v prostoru* $\mathcal{R}^3$ *a najděte souřadnice několika různých vektorů vzhledem k těmto bázím. Jaké jsou souřadnice vektoru* $(1, 2, 3)^T$ *vzhledem ke standardní bázi* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*? Jaké jsou souřadnice téhož vektoru vzhledem k bázi* $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$*?*

Cvičení 6.9 *Předpokládáme, že* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je báze vektorového prostoru* $\mathcal{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Jsou-li* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ *souřadnice vektoru* $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *vzhledem k bázi* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, *pak souřadnice vektoru* $k\mathbf{y}$ *vzhledem k téže bázi jsou* $(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)^T$. *Pokud jsou dále* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ *souřadnice dalšího vektoru* $\mathbf{z}$ *vzhledem k bázi* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, *pak jsou souřadnice součtu* $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ *vzhledem k téže bázi rovné* $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)^T$. *Dokažte.*

Elementární transformace posloupnosti vektorů

Elementární (řádkové i sloupcové) úpravy matice zobecníme na libovolné posloupnosti prvků obecného vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ pomocí následující definice.

Definice 6.12 *Je-li* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *posloupnost prvků vektorového prostoru* $\mathcal{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$, *pak* elementární transformací *této posloupnosti rozumíme jednu z následujících tří úprav:*

1. *prohození dvou vektorů* $\mathbf{x}_i$ *a* $\mathbf{x}_j$,
2. *nahrazení vektoru* $\mathbf{x}_i$ *vektorem* $c\mathbf{x}_i$ *pro nějaké* $0 \neq c \in \mathbf{T}$,
3. *nahrazení vektoru* $\mathbf{x}_j$ *vektorem* $\mathbf{x}_j + c\mathbf{x}_i$ *pro nějaké* $c \in \mathbf{T}$ *a* $i \neq j$.

Stejně jako v případě elementárních řádkových úprav matice jsou také elementární transformace posloupnosti vektorů *vratné* jak si můžete snadno sami ověřit. Následující cvičení je o něco složitější.

Cvičení 6.10 *Dokažte, že efektu první elementární transformace můžeme docílit také vhodnou posloupností elementárních transformací druhého a třetího typu.*

Následující tvrzení je rovněž jednoduchým důsledkem definic.

Tvrzení 6.13 *Předpokládáme, že* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je posloupnost prvků vektorového prostoru* $\mathcal{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$*, a že posloupnost* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *jsme dostali z posloupnosti* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *pomocí posloupnosti elementárních transformací. Potom platí*

- $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)$,
- *posloupnost* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je lineárně nezávislá právě když je také posloupnost* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *lineárně nezávislá,*
- *posloupnost* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *je báze prostoru* $\mathcal{V}$ *právě když je posloupnost* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *také báze* $\mathcal{V}$.

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pouze pro případ, že $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ dostaneme z $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ jednou elementární transformací. V tom případě je každý prvek posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ lineární kombinací nějakých (nejvýše dvou) prvků posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Proto

$$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

a tedy

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Vzhledem k tomu, že každá elementární transformace je vratná, dostaneme také posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ z posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ jednou elementární transformací. Proto platí také opačná inkluze

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n).$$

Je-li posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislá a dostaneme-li z ní posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ první elementární transformací, obsahují obě posloupnosti stejné prvky a proto je také posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislá.

Pokud dostaneme $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ z posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ druhou elementární transformací, platí $\mathbf{y}_i = c\mathbf{x}_i$ pro nějaké i a $0 \neq c \in \mathbf{T}$, a dále $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j$ pro $j \neq i$. Platí-li

$$a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + \cdots + a_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

pak také

$$(a_i c)\mathbf{x}_i + \sum_{j \neq i} a_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Protože je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislá, plyne odtud $a_j = 0$ pro $j \neq i$ a dále $ca_i = 0$. Vzhledem k tomu, že je $c \neq 0$, platí rovněž $a_i = 0$. Posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ je tedy lineárně nezávislá. Vzhledem k tomu, že posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dostaneme z $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ také druhou elementární transformací – vynásobením vektoru $\mathbf{y}_i = c\mathbf{x}_i$ skalárem $c^{-1} \neq 0$ – plyne z lineární nezávislosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ také lineární nezávislost posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Pokud dostaneme $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ z posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ třetí elementární transformací, platí $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ pro všechny indexy $k \neq j$ a $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j + c\mathbf{x}_i$ pro $i \neq j$. Platí-li

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{y}_k = \mathbf{0}$$

pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$, dostaneme po dosazení za vektory $\mathbf{y}_k$ a přerovnání

$$\sum_{k \neq j} a_k \mathbf{x}_k + a_j(\mathbf{x}_j + c\mathbf{x}_i) = \mathbf{0},$$

tj. po dalším přerovnání

$$\sum_{k \neq i} a_k \mathbf{x}_k + (a_i + a_j c)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Protože je posloupnost $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislá, platí $a_k = 0$ pro všechna $k \neq i$ a rovněž $a_i + a_j c = 0$. Protože je $a_j = 0$, plyne odtud rovněž $a_i = 0$. Posloupnost $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ je proto také lineárně nezávislá.

Protože dostaneme také $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ z posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí třetí elementární transformace – k prvku $\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j + c\mathbf{x}_i$ přičteme prvek $-c\mathbf{x}_i = -c\mathbf{y}_i$ – plyne naopak z lineární nezávislosti posloupnosti $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ lineární nezávislost posloupnosti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Třetí tvrzení plyne bezprostředně z prvních dvou. □

Dále použijeme poznatky z této kapitoly pro ujasnění si některých vlastností matic.

Úloha 6.4 *Dokaže, že pro každou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tvaru $m \times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ platí*

- *je-li $\mathbf{P}$ regulární matice řádu m, pak $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{PA})$,*
- *$r(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$.*

Řešení. Pokud jde o první tvrzení, stačí si uvědomit, že vynásobit matici $\mathbf{A}$ zleva nějakou regulární maticí $\mathbf{P}$ řádu m je totéž jako ji upravit posloupností elementárních řádkových úprav, jak vyplývá z Tvrzení 3.12 a poznámek doprovázejících definice jednotlivých elementárních matic. Dále je zřejmé, že posloupnost $[\mathbf{PA}]_{1*}, [\mathbf{PA}]_{2*}, \ldots, [\mathbf{PA}]_{m*}$ řádkových vektorů matice $\mathbf{PA}$ dostaneme z posloupnosti $\mathbf{A}_{1*}, \mathbf{A}_{2*}, \ldots, \mathbf{A}_{m*}$ řádkových vektorů matice $\mathbf{A}$ pomocí elementárních transformací. Podle první části předchozího Tvrzení 6.13 pak platí, že

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{A}) &= \mathcal{L}(\mathbf{A}_{1*}, \mathbf{A}_{2*}, \ldots, \mathbf{A}_{m*}) = \\ &= \mathcal{L}([\mathbf{PA}]_{1*}, [\mathbf{PA}]_{2*}, \ldots, [\mathbf{PA}]_{m*}) = \\ &= \mathcal{R}(\mathbf{PA}).\end{aligned}$$

Abychom dokázali druhou část úlohy, najdeme posloupnost elementárních řádkových úprav matice $\mathbf{A}$, která ji převede do matice $\mathbf{U}$ v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, neboli regulární matici $\mathbf{P}$ řádu m, takovou, že $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$. Podle předchozího odstavce víme, že $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{U})$ a tedy také $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{U})$. Označme si indexy bázových sloupců matice $\mathbf{U}$ postupně $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$, kde $r = r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{A})$ je hodnost matice $\mathbf{A}$. Ukážeme, že nenulové řádky matice $\mathbf{U}$ jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ matice $\mathbf{U}$. Nechť je

$$c_1\mathbf{U}_{1*} + c_2\mathbf{U}_{2*} + \cdots + c_r\mathbf{U}_{r*} = \mathbf{0}.$$

Podíváme se, jak vypadá j_k-tá souřadnice lineární kombinace řádkových vektorů na levé straně poslední rovnosti pro $k = 1, 2, \ldots, r$. Z vektorů $\mathbf{U}_{1*}, \mathbf{U}_{2*}, \ldots, \mathbf{U}_{r*}$ má nenulovou j_k-tou souřadnici pouze vektor $\mathbf{U}_{k*}$ a u něho se tato souřadnice rovná 1. Proto je j_k-tá souřadnice lineární kombinace na levé straně poslední rovnosti rovna c_k. Z poslední rovnosti tak plyne, že $c_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$. Nenulové řádkové vektory matice $\mathbf{U}$ jsou tedy lineárně nezávislé, a proto $\dim \mathcal{R}(\mathbf{U}) = r$. Shrneme-li všechny rovnosti pro hodnosti a dimenze dokázané v tomto paragrafu, dostáváme

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{U}) = r = r(\mathbf{U}) = r(\mathbf{A}).$$

□

Formule $r(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A})$ z předcházející úlohy ukazuje alternativní definici (řádkové) hodnosti matice, která je v učebnicích lineární algebry používána mnohem častěji než Definice 2.3. Častěji používaná definice říká, že *řádková hodnost matice se rovná dimenzi řádkového prostoru této matice.* Pokud vyjdeme z této definice, pak musíme ukázat postup, jak dimenzi řádkového prostoru matice spočítat. Tento postup spočívá v tom, že matici převedeme pomocí elementárních řádkových úprav do řádkově odstupňovaného tvaru, a dokážeme, že počet nenulových řádků v řádkově odstupňovaném tvaru se rovná dimenzi řádkového prostoru matice. My jsme obvyklý postup pouze obrátili, vyšli jsme z "algoritmické" definice hodnosti matice a teprve mnohem později jsme dokázali, že takto definovaná hodnost matice je vlastně dimenze řádkového prostoru matice.

Pro řešení následující úlohy je dobré připomenout si Tvrzení 3.16.

Úloha 6.5 *Dostaneme-li matici* $\mathbf{B}$ *posloupností elementárních řádkových úprav z matice* $\mathbf{A}$ *tvaru* $m \times n$*, potom platí*

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Řešení. Víme už, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{P}$ řádu m – viz Tvrzení 3.12. Dále pomocí Tvrzení 6.3 ukážeme, že jsou-li $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ nějaké sloupcové indexy, $j \neq j_1, \ldots, j_r$, pak

$$\mathbf{A}_{*j} = \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{A}_{*j_k} \quad \text{právě když} \quad \mathbf{B}_{*j} = \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{B}_{*j_k}.$$

Jinak řečeno, platí

$$\mathbf{A}_{*j} \in \mathcal{L}(\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_r})$$

právě když

$$\mathbf{B}_{*j} \in \mathcal{L}(\mathbf{B}_{*j_1}, \mathbf{B}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{B}_{*j_r}).$$

Odtud okamžitě plyne, že posloupnost sloupcových vektorů $\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_r}$ generuje sloupcový prostor $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ právě když posloupnost $\mathbf{B}_{*j_1}, \mathbf{B}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{B}_{*j_r}$ generuje sloupcový prostor $\mathcal{S}(\mathbf{B})$ matice $\mathbf{B}$.

Z Tvrzení 6.3 rovněž dostaneme, že posloupnost $\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_r}$ je lineárně nezávislá právě když je lineárně nezávislá posloupnost $\mathbf{B}_{*j_1}, \mathbf{B}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{B}_{*j_r}$. Platí proto, že posloupnost $\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_r}$ je báze sloupcového prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ právě když je posloupnost $\mathbf{B}_{*j_1}, \mathbf{B}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{B}_{*j_r}$ báze sloupcového prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{B})$ matice $\mathbf{B}$. Oba sloupcové prostory $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{S}(\mathbf{B})$ proto mají stejnou dimenzi. $\square$

Dimenzi sloupcového prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$ obvykle nazýváme *sloupcová hodnost* matice $\mathbf{A}$. Rovná se (řádkové) hodnosti transponované matice $\mathbf{A}^T$. Spojíme-li zjištění posledních dvou úloh, dostaneme následující větu, kterou jsme již dokázali jednou, viz Věta 3.15.

Věta 6.14 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

Důkaz. Matici $\mathbf{A}$ převedeme pomocí elementárních řádkových úprav do matice $\mathbf{U}$, která je v řádkově odstupňovaném tvaru. To znamená, že najdeme regulární matici $\mathbf{P}$, pro kterou platí $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$. Podle předchozích dvou úloh platí $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{U})$, tj. rovněž $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{U})$, a také $\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{U})$. Stačí proto dokázat, že platí rovnost $\dim \mathcal{R}(\mathbf{U}) = \dim \mathcal{S}(\mathbf{U})$.

Při řešení Úlohy 6.4 jsme ukázali, že nenulové řádky matice $\mathbf{U}$ tvoří bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ matice $\mathbf{U}$. Označíme-li r počet nenulových řádků matice $\mathbf{U}$, pak platí $r = \dim \mathcal{R}(\mathbf{U})$.

Jsou-li $\mathbf{U}_{*j_1}, \mathbf{U}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{U}_{*j_r}$ bázové sloupce matice $\mathbf{U}$, pak $\mathbf{U}_{*j_k} = \mathbf{e}_k$ pro $k = 1, \ldots, r$. Bázové sloupce tak tvoří prvních r vektorů standardní báze aritmetického vektorového prostoru $\mathcal{T}^m$. Posloupnost bázových sloupců je proto lineárně nezávislá. Dokážeme-li, že bázové sloupce také generují sloupcový prostor $\mathcal{S}(\mathbf{U})$, dostaneme že platí také $r = \dim \mathcal{S}(\mathbf{U})$.

K tomu stačí ukázat, že každý sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j}$ matice $\mathbf{U}$ je lineární kombinací bázových sloupců $\mathbf{U}_{*j_1}, \mathbf{U}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{U}_{*j_r}$. Protože v matici $\mathbf{U}$ je pouze prvních r řádků nenulových, platí $\mathbf{U}_{*j} = (c_1, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0)^T$ pro nějaké prvky $c_1, \ldots, c_r \in \mathbf{T}$. Potom

$$\mathbf{U}_{*j} = \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{U}_{*j_k},$$

a to znamená, že

$$\mathcal{S}(\mathbf{U}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}) = \mathcal{L}(\mathbf{U}_{*j_1}, \mathbf{U}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{U}_{*j_r}).$$

□

Je vhodné ještě jednou si připomenout, jak probíhal druhý důkaz rovnosti řádkové a sloupcové hodnosti matice. Nejdříve jsme v Úloze 6.4 dokázali, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice. Potom jsme v Úloze 6.5 ukázali, že elementární řádkové úpravy nemění dimenzi sloupcového prostoru matice. Snadno si sami najdete příklad, že elementární řádkové úpravy mohou změnit samotný sloupcový prostor. Nemění ale jeho dimenzi. A nakonec jsme dokázali, že pro matici v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru platí rovnost dimenzí řádkového a sloupcového prostoru. Spolu s faktem, že každou matici můžeme převést pomocí elementárních řádkových úprav do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru, to završilo důkaz rovnosti řádkové a sloupcové hodnosti matice. Druhý důkaz je názornější než první důkaz ve Větě 3.15, který byl založen pouze na počítání s maticemi.

Komprimace dat

Máme-li uchovat velkou matici s malou hodností, můžeme využít našich znalostí k tomu, abychom podstatně zmenšili objem dat, která musíme uchovávat. Tak například, máme-li čtvercovou matici řádu 10^3 a víme-li, že její hodnost je 10^2, nemusíme uchovávat všech 10^6 prvků matice. Stačí uchovat pouze 10^2 bázových sloupců a pro každý ze zbývajících 900 sloupcových vektorů uchovat pouze 100 koeficientů lineární kombinace bázových sloupců, která se danému nebázovému sloupci rovná. Stačí tak uložit pouze $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ skalárů z bázových sloupců a dále $9 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^4 < 10^5$ koeficientů lineárních kombinací pro nebázové sloupce. Tímto způsobem jsme dokázali snížit počet skalárů, které je nutno uchovávat, na méně než jednu pětinu, aniž bychom jakkoliv zmenšili obsah uložené informace.

Důkaz jednoznačnosti redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru matice

Podívejme se blíže na posloupnost $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$ sloupcových vektorů matice $\mathbf{U}$ tvaru $m \times n$, která je v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru. První bázový sloupec $\mathbf{U}_{*j_1}$ je první nenulový sloupec matice $\mathbf{U}$. V posloupnosti sloupcových vektorů $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$ je to tedy první vektor, který není lineární kombinací předcházejících vektorů. Podle Definice 2.9 redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru matice je ve vektoru $\mathbf{U}_{*j_1}$ jediný nenulový prvek číslo 1 v prvním řádku, platí tedy $\mathbf{U}_{*j_1} = \mathbf{e}_1$, tj. $\mathbf{U}_{*j_1}$ je první prvek standardní báze prostoru $\mathcal{T}^m$.

Druhý bázový sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j_2}$ má jediný nenulový prvek číslo 1 ve druhém řádku. Všechny prvky matice $\mathbf{U}$ ležící ve druhém řádku a prvních $j_2 - 1$ sloupcích matice $\mathbf{U}$ jsou rovné 0 podle definice redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru. Sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j_2}$ proto není lineární kombinací předchozích vektorů v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$. Zcela stejně dokážeme, že libovolný bázový sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, r = r(\mathbf{U})$ není lineární kombinací předchozích vektorů v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$. Vektor $\mathbf{U}_{*j_k}$ obsahuje prvek 1 v k-tém řádku, zatímco všechny předcházející vektory v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$ mají v k-tém řádku pouze prvky 0.

Je-li naproti tomu $\mathbf{U}_{*j} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ nějaký nebázový sloupec matice $\mathbf{U}$, a dále $\mathbf{U}_{*j_k}$ pro nějaké $k = 1, 2, \ldots, r$ je ten bázový sloupec, který je nejbližší ke sloupci $\mathbf{U}_j$ zleva, jsou ve sloupci $\mathbf{U}_{*j}$ všechny prvky pod k-tým řádkem rovné 0. Platí proto $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ a

$$\mathbf{U}_{*j} = \sum_{p=1}^{k} c_k \mathbf{U}_{*j_k},$$

tj. nebázový sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j}$ je lineární kombinací předcházejících bázových vektorů v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$. Dokázali jsme tak, že bázové sloupce v matici $\mathbf{U}$ jsou právě ty sloupcové vektory v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$, které nejsou lineární kombinací předcházejících sloupců. Pro nebázové sloupce jsme našli konkrétní vyjádření jako lineární kombinace předcházejících bázových sloupcových vektorů.

Je-li nyní $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^{m \times n}$ libovolná matice, převedeme ji pomocí elementárních řádkových úprav do matice $\mathbf{U}$ v řádkově odstupňovaném tvaru. Podle Tvrzení 3.16 je nějaký sloupcový vektor $\mathbf{A}_{*j}$ lineární kombinací předcházejících vektorů v posloupnosti $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*n}$ právě když je sloupcový vektor $\mathbf{U}_{*j}$ lineární kombinací předcházejících vektorů v posloupnosti $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$. To znamená, že bázové sloupce v matici $\mathbf{U}$ jsou jednoznačně určené maticí $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{U}_{*j}$ je bázový sloupec v matici $\mathbf{U}$ právě když $\mathbf{U}_{*j}$ není lineární kombinací předcházejících vektorů v posloupnosti vektorů $\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*n}$, jak jsme dokázali v předchozích odstavcích. To je podle Tvrzení 3.16 právě když sloupcový vektor $\mathbf{A}_{*j}$ není lineární kombinací předcházejících vektorů v posloupnosti $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*n}$.

To ukazuje, že bázové sloupce v matici $\mathbf{U}$ jsou jednoznačně určené maticí $\mathbf{A}$. Nechť jsou to sloupce $\mathbf{U}_{*j_1}, \mathbf{U}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{U}_{*j_r}$. Bázové sloupce v matici $\mathbf{U}$ hodnosti r, která je v řádkově odstupňovaném tvaru, se rovnají prvním r prvkům standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r$ v prostoru $\mathcal{T}^m$. Víme tedy, že nejen umístění, ale i tvar bázových sloupců v matici $\mathbf{U}$ jsou jednoznačně určené maticí $\mathbf{A}$.

Zbývá dokázat jednoznačnost nebázových sloupcových vektorů $\mathbf{U}_{*j}$. V tom případě je sloupcový vektor $\mathbf{A}_{*j}$ lineární kombinací předcházejících vektorů v posloupnosti $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*n}$, tj. $\mathbf{A}_{*j} \in \mathcal{L}(\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j-1})$. Je-li některý z vektorů $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j-1}$ lineární kombinací předcházejících vektorů, můžeme jej z posloupnosti vyškrtnout, aniž změníme lineární obal této posloupnosti. To znamená, že $\mathbf{A}_{*j} \in \mathcal{L}(\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_k})$, kde $\mathbf{U}_{*j_1}, \mathbf{U}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{U}_{*j_k}$ jsou všechny bázové sloupce v matici $\mathbf{U}$, které jsou vlevo od sloupce $\mathbf{U}_{*j}$. Platí proto

$$\mathbf{A}_{*j} = \sum_{p=1}^{k} d_p \mathbf{A}_{*j_p}$$

pro nějaké skaláry $d_p \in \mathbf{T}$, $p = 1, \ldots, k$. Opět podle Tvrzení 3.16 platí

$$\mathbf{U}_{*j} = \sum_{p=1}^{k} d_p \mathbf{U}_{*j_p} = \sum_{p=1}^{k} d_p \mathbf{e}_p = (d_1, d_2, \ldots, d_k, 0, \ldots, 0)^T.$$

Poslední rovnost tak jednoznačně určuje každý nebázový vektor matice $\mathbf{U}$. Všechny sloupcové vektory matice $\mathbf{U}$, a tedy také celá matice $\mathbf{U}$, jsou tak jednoznačně určené maticí $\mathbf{A}$. Tím jsme doplnili **důkaz Tvrzení 2.11**.

Nyní také můžeme snadno doplnit **důkaz Tvrzení 2.2**. Pokud převedeme matici $\mathbf{A}$ pomocí elementárních řádkových úprav do matice $\mathbf{E}$ v řádkově odstupňovaném tvaru, můžeme matici $\mathbf{E}$ dále převést do redukovaného řádkově odstupňovaného tvaru $\mathbf{U}$ tak, že napřed vynásobíme každý nenulový řádek matice $\mathbf{E}$ vhodným nenulovým číslem tak, aby byl pivot rovný 1. Potom vynulujeme prvky nad každým pivotem pomocí elementárních řádkových úprav třetího druhu. Těmito úpravami se nezmění poloha pivotů, pivoty v matici $\mathbf{U}$ budou na stejných místech, jako pivoty v matici $\mathbf{E}$. Protože je matice $\mathbf{U}$ určená maticí $\mathbf{A}$ jednoznačně, jsou také místa pro pivoty v matici $\mathbf{U}$ určená jednoznačně. Proto jsou i místa pro pivoty v matici $\mathbf{E}$ určená jednoznačně.

Pokud nějaké tvrzení dokazujeme mnohem později, než jsme je zformulovali, a používáme k tomu další tvrzení, která jsme mezitím dokázali, musíme vždy dát pozor, abychom neudělali *důkaz kruhem*. To znamená ověřit, jestli k důkazu nepoužíváme nějaké tvrzení, které jsme dokázali pomocí nedokázaného tvrzení, které se snažíme dokázat teprve nyní. V našem případě je ověření, že jsme nepostupovali kruhem, poměrně jednoduché. K důkazu Tvrzení 2.11 a Tvrzení 2.2 jsme potřebovali Tvrzení 3.16, které závisí pouze na definici lineární kombinace vektorů a na vlastnostech součinu matic z Tvrzení 3.7, které vycházelo pouze z definice součinu matic. Dále jsme potřebovali nějaké výsledky o lineárních obalech z páté a šesté kapitoly, které jsme dokázali pouze na základě axiomů vektorového prostoru. Ani v jednom případě jsme nepotřebovali nic, co by jakýmkoliv způsobem vycházelo z jednoznačnosti matice v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z dané matice $\mathbf{A}$ pomocí elementárních řádkových úprav.

Znovu o podprostorech určených maticí

Začneme tvrzením, které udává jak najít bázi levého nulového prostoru $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$.

Tvrzení 6.15 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je matice hodnosti* $r(\mathbf{A}) = r$*, tvaru* $m \times n$ *a s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$*. Je-li* $\mathbf{P}$ *regulární matice řádu* m *taková, že* *součin* $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$ *je v řádkově odstupňovaném tvaru, pak*

$$\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{P}_{r+1*}, \mathbf{P}_{r+2*}, \ldots, \mathbf{P}_{m*}),$$

neboli levý nulový prostor $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *matice* $\mathbf{A}$ *se rovná lineárnímu obalu posledních* $m-r$ *řádků matice* $\mathbf{P}$.

Dále platí, že $\dim \mathcal{M}(\mathbf{A}) = m - r$.

Důkaz. Matici $\mathbf{U}$ napíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{C}$ je matice tvaru $r \times n$ a hodnosti r (neboť řádky matice $\mathbf{C}$ jsou lineárně nezávislé) a $\mathbf{0}$ je nulová matice tvaru $(m-r) \times n$.

Podobně také matici $\mathbf{P}$ napíšeme v blokovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix},$$

kde matice $\mathbf{P}_1$ má tvar $r \times m$ a matice $\mathbf{P}_2$ má tvar $(m-r) \times m$.

Z rovnosti $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$ vyplývá $\mathbf{P}_2\mathbf{A} = \mathbf{0}$, a to znamená, že řádkový prostor

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{P}_{r+1*}, \mathbf{P}_{r+2*}, \ldots, \mathbf{P}_{m*}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{A}).$$

Pro důkaz opačné inkluze si napíšeme inverzní matici $\mathbf{P}^{-1}$ v blokovém tvaru $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$, kde matice $\mathbf{Q}_1$ má tvar $m \times r$ a matice $\mathbf{Q}_2$ musí proto mít tvar $m \times (m-r)$. Potom platí

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_1\mathbf{C} + \mathbf{Q}_2\mathbf{0} = \mathbf{Q}_1\mathbf{C}.$$

Dále z rovnosti

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 & \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_1 & \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$$

plyne $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_r$. Vynásobíme-li matice $\mathbf{P}^{-1}$ a $\mathbf{P}$ v opačném pořadí, dostaneme

$$\mathbf{I}_m = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2,$$

tj. $\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1 = \mathbf{I}_m - \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2$.

Abychom dokázali opačnou inkluzi $\mathcal{M}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{P}_{r+1*}, \mathbf{P}_{r+2*}, \ldots, \mathbf{P}_{m*})$, vezmeme libovolný vektor

$$\mathbf{y} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathcal{M}(\mathbf{A}).$$

To znamená, že

$$\mathbf{0} = \mathbf{yA} = \mathbf{yP}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{yQ}_1\mathbf{C}.$$

Protože $r(\mathbf{U}) = r$, plyne odtud a z druhé části Cvičení 5.4, že $\mathbf{yQ}_1 = \mathbf{0}$. Tuto rovnost vynásobíme zprava maticí $\mathbf{P}_1$ a dostaneme rovnost

$$\mathbf{0} = \mathbf{0P}_1 = \mathbf{yQ}_1\mathbf{P}_1 = \mathbf{y}(\mathbf{I}_m - \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2) = \mathbf{y} - \mathbf{yQ}_2\mathbf{P}_2,$$

neboli

$$\mathbf{y} = \mathbf{yQ}_2\mathbf{P}_2 = (\mathbf{yQ}_2)\mathbf{P}_2.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_2)$, tj.

$$\mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{P}_{r+1*}, \mathbf{P}_{r+2*}, \ldots, \mathbf{P}_{m*}).$$

K důkazu druhé části tvrzení stačí si uvědomit, že řádkové vektory regulární matice jsou lineárně nezávislé podle Cvičení 6.2. $\Box$

Použijeme-li předchozí tvrzení na transponovanou matici $\mathbf{A}^T$, dostaneme následující důsledek.

Důsledek 6.16 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *platí* $\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{A})$. $\Box$

Úloha 6.6 *Najděte nějakou generující množinu levého nulového prostoru* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ *matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Najdeme posloupnost elementárních matic $\mathbf{E}_k, \ldots, \mathbf{E}_1$ řádu 3, pro kterou platí $\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, kde $\mathbf{U}$ je matice v řádkově odstupňovaném tvaru. Potom platí $\mathbf{P} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{I}_3$, tj. matici $\mathbf{P}$ dostaneme tak, že stejnou posloupnost elementárních řádkových úprav uděláme na jednotkovou matici $\mathbf{I}_3$. Postupujeme tedy obdobně jako při výpočtu inverzní matice. Připíšeme si jednotkovou matici $\mathbf{I}_3$ k matici $\mathbf{A}$ a děláme tytéž elementární řádkové úpravy současně na obě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy $\mathcal{M}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}((1/3, -5/3, 1))$. □

Následující tvrzení shrnuje dosud získané poznatky o dimenzi a bázích čtyřech podprostorů definovaných maticí.

Tvrzení 6.17 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je matice hodnosti* $r(\mathbf{A}) = r$, *tvaru* $m \times n$ *a s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$. *Potom platí*

- $\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) = r$ *a bázové sloupce matice* $\mathbf{A}$ *tvoří bázi prostoru* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Jestliže $\mathbf{P}$ *je regulární matice řádu* m *a součin* $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$ *je v řádkově odstupňovaném tvaru, pak*

- $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = r$ *a nenulové řádky matice* $\mathbf{U}$ *tvoří bázi prostoru* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$,
- $\dim \mathcal{M}(\mathbf{A}) = m - r$ *a posledních* $m - r$ *řádků matice* $\mathbf{P}$ *tvoří bázi prostoru* $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

A nakonec, je-li $\mathbf{x} = x_{f_1}\mathbf{h}_1 + x_{f_2}\mathbf{h}_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}\mathbf{h}_{n-r}$ *obecné řešení homogenní soustavy* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, *pak platí*

- $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n - r$ *a vektory* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ *tvoří bázi prostoru* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Důkaz. Jediné, co jsme ještě nedokázali, je lineární nezávislost vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$. Z Důsledku 6.16 plyne, že $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n - r$. Protože vektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-r}$ generují podprostor $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ podle Věty 2.5, plyne jejich lineární nezávislost z druhé části Tvrzení 6.9. □

Následující důsledek je natolik důležitý, že jej uvedeme jako větu.

Věta 6.18 *Pro každou matici tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$ *platí*

$$\dim \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n.$$

□

Cvičení 6.11 *Na základě řešení Úlohy 6.6 zformulujte analogický algoritmus pro řešení homogenní soustavy* m *lineárních rovnic o* n *neznámých* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. *Porovnejte výpočetní náročnost tohoto algoritmu s výpočetní náročností algoritmu založeného na Gaussově eliminaci a zpětné substituci.*

Hodnost součinu matic

Tvrzení 6.19 *Jsou-li* $\mathbf{A}$ *matice tvaru* $m \times n$ *a* $\mathbf{B}$ *matice tvaru* $n \times p$, *obě s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$, *pak platí*

$$r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}) - \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Důkaz. Zvolíme nějakou bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ v podprostoru $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$. Protože platí $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a posloupnost $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ je lineárně nezávislá, můžeme ji podle Tvrzení 6.7 doplnit do báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_t$ prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{B})$. Potřebujeme dokázat, že $\dim \mathcal{S}(\mathbf{AB}) = t$. To uděláme tak, že dokážeme, že posloupnost vektorů $\mathbf{Az}_1, \ldots, \mathbf{Az}_t$ je báze prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{AB})$.

Je-li $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{AB})$, pak platí $\mathbf{b} = \mathbf{ABy}$ pro nějaký vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{T}^n$. To znamená, že vektor $\mathbf{By} \in \mathcal{S}(\mathbf{B})$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_t$ prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{B})$:

$$\mathbf{By} = \sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{t} c_k \mathbf{z}_k,$$

a tedy

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{By}) = \sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{Ay}_j + \sum_{k=1}^{t} c_k \mathbf{Az}_k = \sum_{k=1}^{t} c_k \mathbf{Az}_k.$$

To znamená, že vektory $\mathbf{Az}_1, \ldots, \mathbf{Az}_t$ generují prostor $\mathcal{S}(\mathbf{AB})$.

Abychom dokázali, že posloupnost $\mathbf{Az}_1, \ldots, \mathbf{Az}_t$ je lineárně nezávislá, budeme předpokládat, že

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{t} a_k \mathbf{A}(\mathbf{z}_k) = \mathbf{A}(\sum_{k=1}^{t} a_k \mathbf{z}_k).$$

Odtud dostáváme, že vektor

$$\sum_{k=1}^{t} a_k \mathbf{z}_k \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}).$$

Můžeme proto tento vektor vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ prostoru $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B})$:

$$\sum_{k=1}^{t} a_k \mathbf{z}_k = \sum_{j=1}^{s} d_j \mathbf{y}_j,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{t} a_k \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^{s} (-d_j)\mathbf{y}_j = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k lineární nezávislosti prvků báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_t$ prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{B})$ odtud plyne, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$. Posloupnost $\mathbf{A}\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{z}_t$ je tedy lineárně nezávislá a proto báze prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{AB})$. Odtud dostáváme, že

$$\begin{aligned} r(\mathbf{B}) &= \dim \mathcal{S}(\mathbf{B}) = s + t = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) + \dim \mathcal{S}(\mathbf{AB}) = \\ &= \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) + r(\mathbf{AB}). \end{aligned}$$

□

Tvrzení 6.19 má několik důsledků. První z nich jsme již dokázali jiným způsobem v Úloze 6.4 a Úloze 6.5.

Důsledek 6.20 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je matice tvaru* $m \times n$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$. *Potom pro každou regulární matici* $\mathbf{P}$ *řádu* m *a každou regulární matici* $\mathbf{Q}$ *řádu* n *platí*

- $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ})$.

Jeli dále $\mathbf{B}$ *matice tvaru* $n \times p$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$, *pak platí*

- $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})$,
- $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leq r(\mathbf{AB})$.

Důkaz. Je-li $\mathbf{P}$ regulární matice, pak $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{0}\}$ podle Cvičení 5.4. Proto také $\mathcal{N}(\mathbf{P}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. Proto podle Tvrzení 6.19 platí

$$r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{A}) - \dim \mathcal{N}(\mathbf{P}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}).$$

K důkazu rovnosti $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{AQ})$ použijeme navíc Větu 3.15 o rovnosti hodnosti matice a matice k ní transponované (můžeme také použít Větu 6.14). Platí

$$r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{AQ})^T = r(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}).$$

K důkazu druhé části použijeme opět Tvrzení 6.19:

$$r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}) - \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{B}).$$

Z právě dokázané nerovnosti a Věty 3.15 pak plyne rovněž

$$r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{AB})^T = r(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}).$$

Tím je dokázána druhá část.

Z inkluze $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$ plyne podle Věty 6.10 a poslední části Tvrzení 6.17 nerovnost

$$\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \leq \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{A}),$$

a proto opětovným použitím Tvrzení 6.19 dostaneme nerovnost

$$r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B}) - \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{S}(\mathbf{B}) \geq r(\mathbf{B}) + r(\mathbf{A}) - n.$$

□

Všimněte si také, že druhá část posledního důsledku plyne rovněž z Tvrzení 3.7. Z něho vyplývá, že každý řádek součinu **AB** je lineární kombinací řádků matice **B**, a proto každý řádek součinu **AB** leží v prostoru $\mathcal{L}(\mathbf{B}_{*1}, \mathbf{B}_{*2}, \ldots, \mathbf{B}_{*p}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$. Proto také $\mathcal{R}(\mathbf{AB}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{B})$ a

$$r(\mathbf{AB}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{AB}) \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{B}) = r(\mathbf{B}).$$

Obdobně nerovnost $r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A})$ plyne z faktu, že každý sloupec součinu **AB** je lineární kombinací sloupců matice **A** a proto $\mathcal{S}(\mathbf{AB}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Součet podprostorů

Definice 6.21 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dva podprostory vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak definujeme* součet podprostorů *$\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jako podprostor*

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{L}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$$

prostoru $\mathcal{V}$.

Úloha 6.7 *Dokažte, že jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dva podprostory vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak platí*

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}.$$

Řešení. Inkluze $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\} \subseteq \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je zřejmá. K důkazu opačné inkluze vezmeme libovolný prvek $\mathbf{z} \in \mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{L}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$. Podle Tvrzení 5.8 platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{y}_j$$

pro nějaké vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l \in \mathcal{Y}$ a skaláry $a_i, b_j \in \mathbf{T}$. Protože jsou $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ podprostory prostoru $\mathcal{V}$, můžeme položit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \quad \text{a} \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{l} b_j \mathbf{y}_j \in \mathcal{Y}.$$

□

Tvrzení 6.22 *Je-li $\mathcal{V}$ konečně-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ dva podprostory $\mathcal{V}$, pak platí*

$$\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}.$$

Důkaz. Především je třeba si uvědomit, že všechny čtyři podprostory mají konečnou dimenzi podle Věty 6.10. K důkazu rovnosti si stačí zapamatovat, že musíme začít volbou báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ v průniku podprostorů $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Tuto lineárně nezávislou posloupnost můžeme podle Tvrzení 6.7 doplnit do báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ podprostoru $\mathcal{X}$ a do báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ podprostoru $\mathcal{Y}$. Dokážeme, že $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ je báze podprostoru $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$.

Libovolný vektor $\mathbf{z} \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ můžeme podle Úlohy 6.7 vyjádřit jako součet $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ pro nějaké vektory $\mathbf{x} \in \mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l)$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$. Proto

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m),$$

tj. vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ generují podprostor $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$.

Abychom dokázali, že je $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ také lineárně nezávislá posloupnost, vezmeme libovolnou lineární kombinaci

$$\sum_{p=1}^{k} a_p \mathbf{u}_p + \sum_{q=1}^{l} b_q \mathbf{x}_q + \sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r = \mathbf{0}.$$

Z této rovnosti plyne, že vektor

$$\mathbf{w} = \sum_{p=1}^{k} a_p \mathbf{u}_p + \sum_{q=1}^{l} b_q \mathbf{x}_q = -\sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r$$

leží jak v $\mathcal{X}$ coby lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$, tak také v podprostoru $\mathcal{Y}$ coby lineární kombinace vektorů $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Proto $\mathbf{w} \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, a protože je posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ báze $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, platí také

$$\mathbf{w} = \sum_{p=1}^{k} d_p \mathbf{u}_p.$$

Kromě toho máme už vyjádření

$$\mathbf{w} = -\sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r .$$

Odtud dostáváme, že

$$\mathbf{0} = \sum_{p=1}^{k} d_p \mathbf{u}_p + \sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r .$$

Protože je posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ lineárně nezávislá, plyne z poslední rovnosti $d_1 = \cdots = d_k = c_1 = \cdots = c_r = 0$. Dosazením za koeficienty c_r do rovnosti

$$\sum_{p=1}^{k} a_p \mathbf{u}_p + \sum_{q=1}^{l} b_q \mathbf{x}_q = -\sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r = \mathbf{0}$$

dostaneme vzhledem k tomu, že také posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l$ je lineárně nezávislá, rovnosti $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_l = 0$. Všechny koeficienty v lineární kombinaci

$$\sum_{p=1}^{k} a_p \mathbf{u}_p + \sum_{q=1}^{l} b_q \mathbf{x}_q + \sum_{r=1}^{m} c_r \mathbf{y}_r = \mathbf{0}$$

jsou tak nulové, a posloupnost $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ je lineárně nezávislá a proto je báze podprostoru $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) &= (k + l + m) + k = (k + l) + (k + m) = \\ &= \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

□