

# Inženýr, jeřáb a matice

## Výpočet sil v prutových soustavách styčnickovou metodou

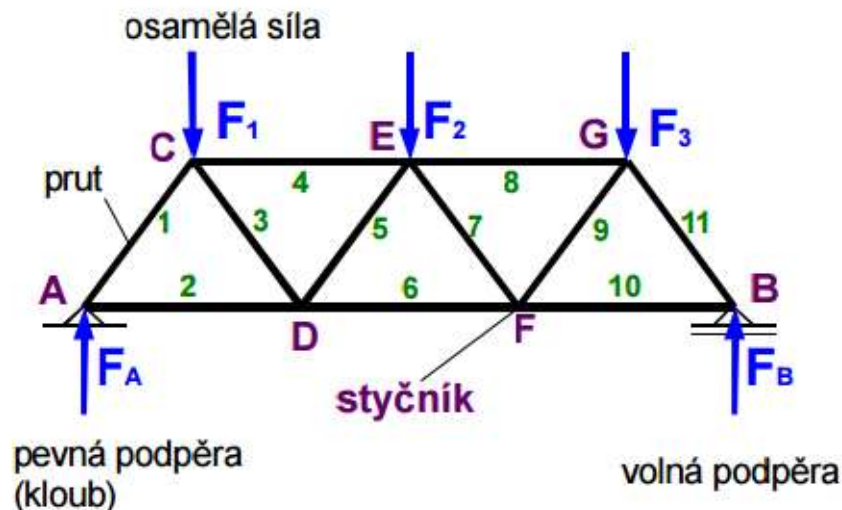
### Úvod

Ráda bych ve své práci představila počítání prutových soustav. Jedná se o poměrně rozsáhlé téma, a proto nebudu vysvětlovat metodu uvolňování ani principy statické určitosti. Zároveň se budu snažit omezit pojmy ze strojírenství a ukázat jen princip samotného výpočtu.

### Reálná situace

Při návrhu konstrukce železničního mostu se inženýr může ubírat několika směry; může se jednat o most lanový, betonový, kovový a mnoho dalších. Pokud si inženýr vybere kovový most typu příhradového nosníku, bude ve většině případů řešit jednoduchou rovinnou prutovou soustavu. Začíná geometrickým návrhem (výpočtovým modelem) prutové soustavy. Při návrhu musí dodržet podmínky statické a tvarové určitosti. Po návrhu tvaru (vzhledu) celkové konstrukce potřebuje zjistit parametry jednotlivých částí (profil a rozměr).

Prutová soustava je tvořena pruty (štíhlá tělesa), které jsou spojeny svými konci ve styčnicích, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: Vysvětlení základních pojmů

Zajímá nás, jaké síly budou v konstrukci mostu působit a tedy jak ji budeme muset uzpůsobit tak, aby splňovala požadovanou nosnost<sup>1</sup>. Vnější síly působí pouze ve styčnicích a pruty potom přenášejí tzv. osově síly, které vytvářejí v prutech tlak nebo tah.

Na Obrázku 1 vidíme 3 vnější síly  $F_{1-3}$ , jejichž velikost známe. Síly  $F_A$  a  $F_B$  (vnější reakce) jsou síly neznámé společně s osovými silami působícími v prutech.

## Matematický model, princip výpočtu

Počítáme tak, že všechny pruty jsou dokonale tuhé, všechny styčnice dokonalé klouby a podpěry (uložení) jsou dokonale pevné; ani zatížením konstrukce se nevyvolá posun podpěry. Vlastní hmotnost konstrukce je při základním statickém výpočtu zanedbána. Při přesnějším výpočtech v softwarovém prostředí je možné vlastní hmotnost zahrnout jako neznámou, složenou právě z hmotností jednotlivých částí konstrukce.

Formulace problému v matematice vychází z výpočtového modelu mostu, kde si styčnice označíme jako body a pruty jako přímky, které je spojují. Všechny síly budou reprezentovány vektory. Vnější síly působí pouze v bodech a jsou rozloženy ve směru přímk.

Abychom zjistili velikosti sil, napíšeme si pro každý bod silové podmínky rovnováhy. Chceme, aby součet všech silových vektorů působících v jednom bodě dal dohromady nulový vektor. Pokud si potom podmínky rozložíme tak aby byla zvlášť rovnováha v ose  $x$  a  $y$ , dostaneme soustavu  $n$  rovnic o  $n$  neznámých, kde  $n$  je dvojnásobek počtu bodů v nákresu (počtu styčniců).

Velikost síly, kterou chceme vypočítat, odpovídá délce vektoru v nějakém předem zvoleném měřítku.

## Řešení reálného příkladu

Přestože jsme se v úvodu zabývali konstrukcí železničního mostu, vypočítáme si nyní síly působící v konstrukci jeřábu, abychom viděli, jak výpočet funguje pro složitější konstrukce. Budeme řešit následující příklad převzatý včetně řešení ze skript ZU v Plzni [3].

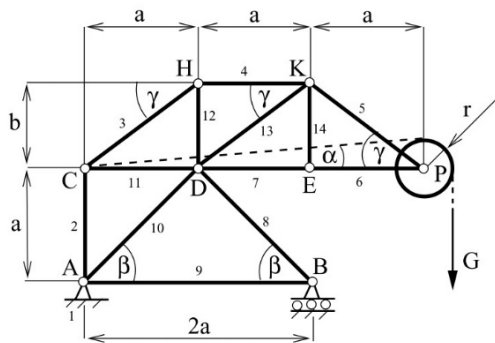
Ráda bych si vymyslela vlastní příklad prutové sestavy, ale sama bych si troufla pouze na nějaký jednoduchý příklad mostu z úvodu práce. Tento příklad jsem zvolila proto, aby byl zajímavější a složitější. Snažila jsem se řešení neopsat, ale pochopit a vlastními slovy popsat postup výpočtu.

*Mechanický model rovinné prutové konstrukce jeřábu, obrázek 2, je zatížen tíhou  $G$  břemene zavěšeného na laně, které je opásáno přes kladku o poloměru  $r$ .*

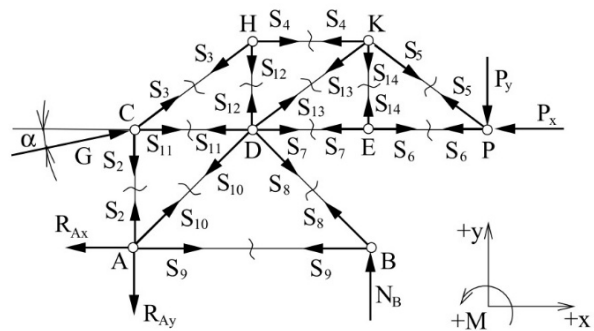
*Dáno:  $G = 400 \text{ N}$ ;  $a = 1,5 \text{ m}$ ;  $b = 0,9 \text{ m}$ ;  $r = 0,3 \text{ m}$*

---

<sup>1</sup> Profil prutu vyplývá z typu konstrukce a druhu styčnic. Rozměr prutu vyplývá z použitého profilu a typu sil, které na něj budou působit.



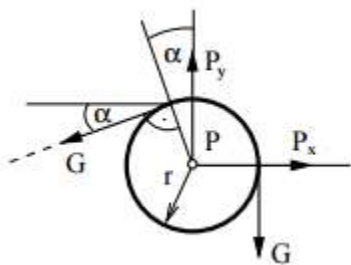
Obrázek 2: Označení výpočtového modelu



Obrázek 3: Neznámé působící síly

Nákres na obrázku 2 je označen písmeny a čísly podle zvyklostí ve strojírenství. Na obrázku 3 jsou všechny síly označeny vektorem, který jde směrem od bodu, ze kterého působí, tedy to vypadá, že všechny pruty jsou namáhány na tlak. Toto označení je ovšem jen pro zjednodušení výpočtu a nákresu; pokud síla působí v obráceném směru, vyjde nám její hodnota záporná.

Při výpočtu je nejdříve nutné transformovat síly působící na kladku, abychom mohli počítat s prostě zatíženou prutovou sestavou. Principem tohoto výpočtu je metoda uvolňování prvků, která je přiblížena na obrázku 4 a v rovnicích (1) a (2).



Obrázek 4: Uvolňování kladky

$$P_x - G \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$P_y - G - G \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

Dostaneme:

$$P_x = G \cos \alpha \quad (3)$$

$$P_y = G (1 + \sin \alpha) \quad (4)$$

$$\alpha = \arcsin (r/3a) \quad (5)$$

$P_x$  a  $P_y$  jsou dvě složkové podmínky rovnováhy ve směru os  $x$  a  $y$ . Na obrázku 3 si také můžeme všimnout síly  $G$ , která působí v bodě  $C$ , to je také důsledek uvolnění kladky.

Vektory  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  a  $N_B$  jsou neznámé síly, reakce uložení jeřábu, také je budeme chtít spočítat.

Podle údajů na obrázku 2 si vypočítáme velikosti úhlů  $\beta$  a  $\gamma$ . Z geometrických parametrů dostáváme, že

$$\tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ \quad \tan \gamma = b/a \Rightarrow \gamma = \arctan(b/a) \quad (6)$$

Dále máme, že pro bod A platí podmínka rovnováhy:

$$\vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} = \vec{S}_2 + \vec{S}_9 + \vec{S}_{10} \quad (7)$$

Tuto podmínku si rozdělíme na dvě složky ve směru os  $x$  a  $y$ .

$$S_9 + S_{10} \cos \beta - R_{Ax} = 0 \quad (8)$$

$$S_2 + S_{10} \sin \beta - R_{Ay} = 0 \quad (9)$$

Takovéto podmínky napíšeme pro všechny ostatní body:

$$\text{Bod B:} \quad -S_9 - S_8 \cos \beta = 0 \quad (10)$$

$$N_B + S_8 \sin \beta = 0 \quad (11)$$

$$\text{Bod C:} \quad S_{11} + S_3 \cos \gamma + G \cos \alpha = 0 \quad (12)$$

$$S_3 \sin \gamma - S_2 + G \sin \alpha = 0 \quad (13)$$

$$\text{Bod D:} \quad S_7 + S_{13} \cos \gamma - S_{11} + S_8 \cos \beta - S_{10} \cos \beta = 0 \quad (14)$$

$$S_{12} + S_{13} \sin \gamma - S_8 \sin \beta - S_{10} \sin \beta = 0 \quad (15)$$

$$\text{Bod E:} \quad S_6 - S_7 = 0 \quad (16)$$

$$S_{14} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Bod H:} \quad S_4 - S_3 \cos \gamma = 0 \quad (18)$$

$$-S_{12} - S_3 \sin \gamma = 0 \quad (19)$$

$$\text{Bod K:} \quad S_5 \cos \gamma - S_4 - S_{13} \cos \gamma = 0 \quad (20)$$

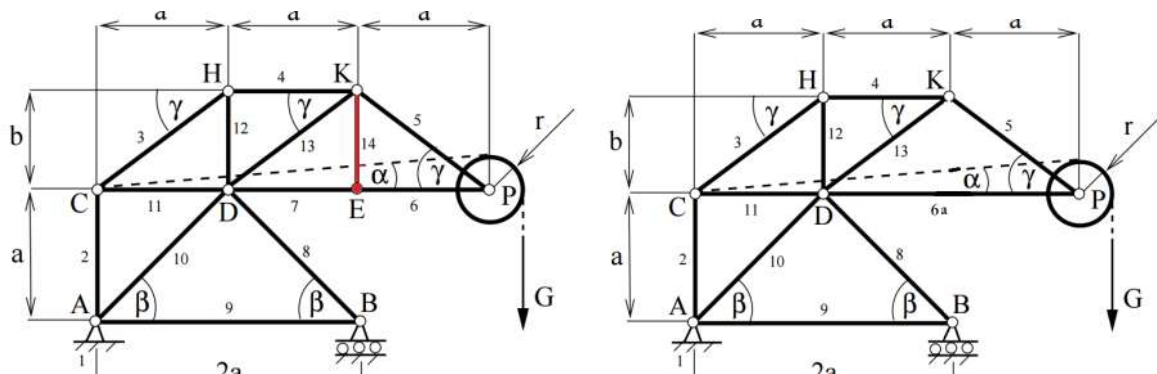
$$-S_5 \sin \gamma - S_{14} - S_{13} \sin \gamma = 0$$

$$\text{Bod P:} \quad -P_x - S_6 - S_5 \cos \gamma = 0 \quad (21)$$

$$-P_y + S_5 \sin \gamma = 0 \quad (22)$$

V rovnici (17) vidíme, že síla  $S_{14}$  má nulovou velikost, tedy ji reprezentuje nulový vektor. To je způsobeno tím, že je konstrukce tvarově přeuročená tzn., obsahuje víc prutů a styčniců, než by musela. Prut číslo 14 má v konstrukci význam pro rozložení sil v prutech 6 a 7, aby tyto pruty nemusely být příliš masivní. Dále proto tuto sílu nebudeme zahrnovat do výpočtu.

Na obrázku 5 vidíme, jak by prutová soustava vypadala, bez prutu číslo 14 a styčnicku E. Prut 6a má délku rovnou součtu délek prutů 6 a 7 a bude namáhán stejnou silou jako tyto dva pruty, ale s ohledem na délku by musel být jeho profil větší.



Obrázek 5: Zjednodušená konstrukce

Dostali jsme soustavu 15 rovnic o 15 neznámých. Mohli bychom ji řešit tradičním způsobem, ale raději si ji zapíšeme pomocí matice, přinese nám to veliké zjednodušení.

Maticový zápis, který dokáže obsáhnout všechny prvky z předcházející soustavy rovnic, vypadá takto:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (23)$$

Kde A je matice geometrického uspořádání soustavy,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \beta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos \beta & 0 & -\cos \beta & -1 & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & 0 & -\sin \beta & 0 & 1 & \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \gamma & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$  je vektor neznámých, kde

$$\mathbf{x} = (R_{Ax}, R_{Ay}, N_B, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13})^T$$

$\mathbf{b}$  je vektor známých veličin, kde

$$\mathbf{b} = (0, 0, 0, 0, -G \cos \alpha, -G \sin \alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, P_x, P_y)^T.$$

Pomocí elementárních řádkových úprav se můžeme přesvědčit, že matice  $A$  má hodnotu  $\text{rank}(A) = 15$ , takže soustava rovnic má jednoznačné řešení  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ , které určíme pomocí programu MATLAB nebo Mathematica.

Výsledný vektor je

$$\mathbf{x} = (0; 240; 640; 880; 1658,6; 1422, 2; 829, 3; -1110, 2; -905, 1; 640; -905, 1; -1821, 3; -853, 3; -829, 3)^T$$

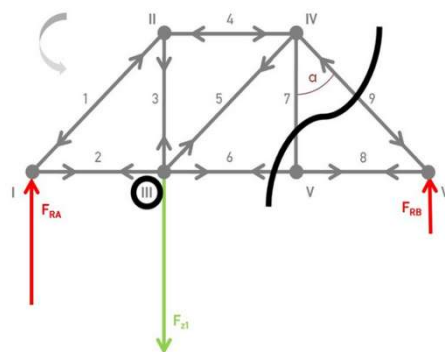
kde uvedené hodnoty jsou v newtonech (N). Síly, které vyšly záporné, působí v opačném směru, než je zobrazen na obrázku 3.

Takto celkem jednoduše jsme spočítali všechny neznámé síly.

## Závěr

Právě provedeným výpočtem jsme udělali statickou analýzu prutové sestavy, což je důležitá část návrhu konstrukce. Dále je třeba zabývat se i stránkou pružnosti materiálu, která částečně (ve většině případů zanedbatelně) změní parametry (úhly a délky) konstrukce, a dynamikou konstrukce (především rezonančními stavy), abychom zajistili, že naše konstrukce bude odpovídat požadavkům a nedojde k destruktivním změnám.

Výpočet sil v prutové soustavě lze provádět i jinými způsoby a to např. průsečnou metodou. Tento způsob výpočtu používáme ve chvíli, kdy chceme zjistit jen některé síly v příhradovém nosníku. Tato metoda je o dost složitější a její úspěšnost závisí na volbě správného řezu konstrukcí, viz obrázek 6. Celou konstrukci je také možné řešit graficky, avšak tato metoda je pro konstrukce, které obsahují 5 a více styčnicků nevhodná. Pokud tedy umíme rychle napsat maticovou variantu rovnovážných rovnic a umíme použít program MATLAB, je styčnicková metoda rychlejší, přestože toho musíme vypočítat víc.



Obrázek 6: Ukázka průsečné metody (vhodný řez značí černá čára)

## Zdroje

- [1] MARTÍNEK, A. (2011): *Prutové soustavy sil – dlouhodobá maturitní práce*, [vid. 5. srpna 2015]  
<http://prutovesoustavysil.webnode.cz/metody-reseni/pocetni-reseni/>
- [2] TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA: *Stavební statika – Rovinný kloubový příhradový nosník*, [vid. 10. srpna 2015]  
[http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/plakat\\_ss3.pdf](http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/plakat_ss3.pdf)
- [3] Ing. VIMMR, J. PhD. : *Materiály ke 12. přednášce z předmětu KME/MECHB*, [vid. 6. srpna 2015]  
[http://www.kme.zcu.cz/kmet/mechb/download/MECHB\\_p12\\_Prutove\\_soustavy\\_stycnikova\\_metoda.pdf](http://www.kme.zcu.cz/kmet/mechb/download/MECHB_p12_Prutove_soustavy_stycnikova_metoda.pdf)
- [4] ŠIDLÓF, P.: *Prutové a příhradové konstrukce*, [vid. 11. srpna 2015]  
<http://bacula.nti.tul.cz/~petr.sidlof/vyuka/NTI-MEC/prednasky/pr07-Statika-6.pdf>
- [5] NEZNÁMÝ AUTOR: *Statika nosných konstrukcí*, [vid. 13. září 2015]  
[https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CCAQFjAAahUKEwiMleXF8\\_PHAhWCchQKHcWwDwA&url=http%3A%2F%2Fdomp.4fan.cz%2Fwp-content%2Fuploads%2F5.-pred.Statika-nosnych-konstrukci.ppt&usg=AFQjCNFjGf5vjwJJJO7PnYwi4BNqqHca9g&sig2=eZzYnLswFYEd3DBJOTVa8Q](https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CCAQFjAAahUKEwiMleXF8_PHAhWCchQKHcWwDwA&url=http%3A%2F%2Fdomp.4fan.cz%2Fwp-content%2Fuploads%2F5.-pred.Statika-nosnych-konstrukci.ppt&usg=AFQjCNFjGf5vjwJJJO7PnYwi4BNqqHca9g&sig2=eZzYnLswFYEd3DBJOTVa8Q)