Počítání na soudobých počítačových architekturách - matice, grafy, sítě, ale hlavně matematika

Přednáška k poctě Miroslava Fiedlera a Alana George

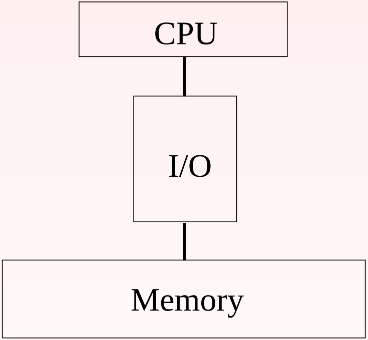
Miroslav Tůma
Katedra numerické matematiky, MFF UK
mirektuma@karlin.mff.cuni.cz

MFF UK, 28.4.2016

Outline

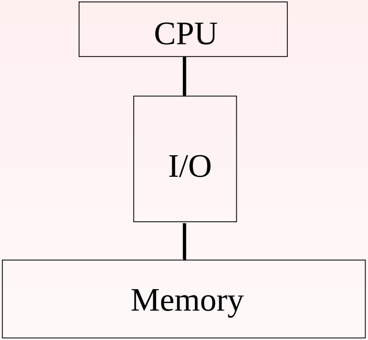
Úvod do problému

Tradiční pohled na počítače (a takové počítače už vyhynuly)



Úvod do problému

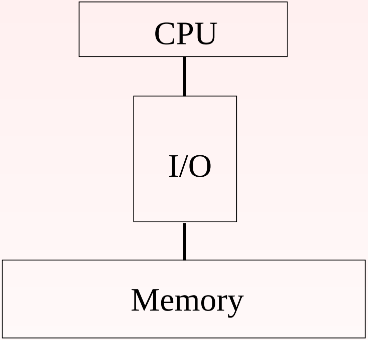
Tradiční pohled na počítače (a takové počítače už vyhynuly)



- I v takto jednoduchém modelu kterákoli z těchto tří částí může činit problémy při počítání.

Úvod do problému

Tradiční pohled na počítače (a takové počítače už vyhynuly)



- I v takto jednoduchém modelu kterákoli z těchto tří částí může činit problémy při počítání.
- Vývoj počítačových architektur výkon klasického modelu průběžně vylepšuje, ale činí jej také vnitřně složitějším
- $\longrightarrow$ soudobé (paralelní) počítačové architektury

Úvod do problému

Paralelismus v počítačových architekturách

- Nedají se počítače zrychlit bez zvyšování jejich vnitřní složitosti?

- Potřebujeme vůbec stále vyšší výkon? Co vlastně potřebujeme počítat?

Úvod do problému

Paralelismus v počítačových architekturách

- Nedají se počítače zrychlit bez zvyšování jejich vnitřní složitosti?
  - ☺: Počítače jsou pořád rychlejší (Moore's law - počet tranzistorů na čipu se zvětšuje ročně přibližně na dvojnásobek - 2.3k (4004, 1971) → 5G (AMD Xbox, 2013))
  - ☹: Velikost paměti už tak rychle neroste.
  - ☹: Fyzikální limity (rychlost světla, tepelná disipace, absolutní kvantová omezení (Bremmermanova mez - maximální výpočetní rychlost závislá na Einsteinově ekvivalenci a Heisenbergově principu, Landauerova mez na minimální spotřebu energie - omezení závislé na Boltzmannově konstantě a absolutní teplotě, atd.)
- Potřebujeme vůbec stále vyšší výkon? Co vlastně potřebujeme počítat?

Úvod do problému

Paralelismus v počítačových architekturách

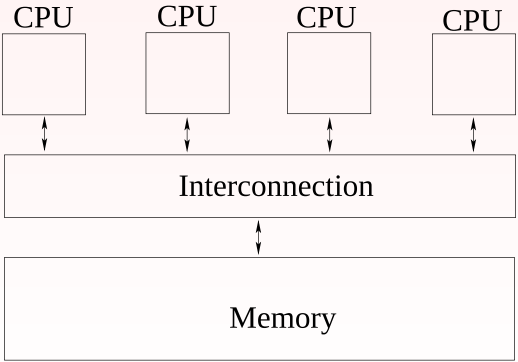
- Nedají se počítače zrychlit bez zvyšování jejich vnitřní složitosti?
  - ☺: Počítače jsou pořád rychlejší (Moore's law - počet tranzistorů na čipu se zvětšuje ročně přibližně na dvojnásobek - 2.3k (4004, 1971) → 5G (AMD Xbox, 2013))
  - ☹: Velikost paměti už tak rychle neroste.
  - ☹: Fyzikální limity (rychlost světla, tepelná disipace, absolutní kvantová omezení (Bremmermanova mez - maximální výpočetní rychlost závislá na Einsteinově ekvivalenci a Heisenbergově principu, Landauerova mez na minimální spotřebu energie - omezení závislé na Boltzmannově konstantě a absolutní teplotě, atd.)
- Potřebujeme vůbec stále vyšší výkon? Co vlastně potřebujeme počítat?
  - Modelování klimatu (přesnější a globálnější modely), Skládání proteinů (léčení Alzheimerovy a Parkinsonovy nemoci)
  - Energetický výzkum (spalování, solární články, baterie, větrná energie)
  - Deformace konstrukcí a dopravních prostředků, Turbulentní proudění, Zobrazovací metody v medicíně a mnoho dalších.

Úvod do problému

- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou přirozenou odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) výhodnější. Byť nám přinášejí nové problémy.

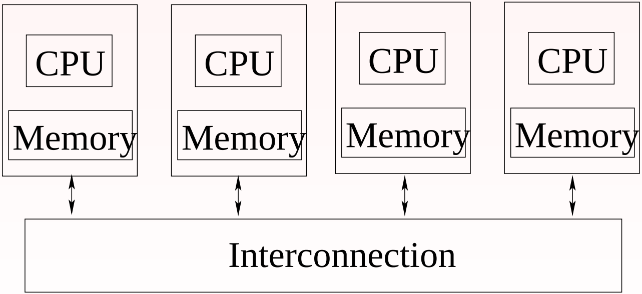
Úvod do problému

- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou přirozenou odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) výhodnější. Byť nám přinášejí nové problémy.



Úvod do problému

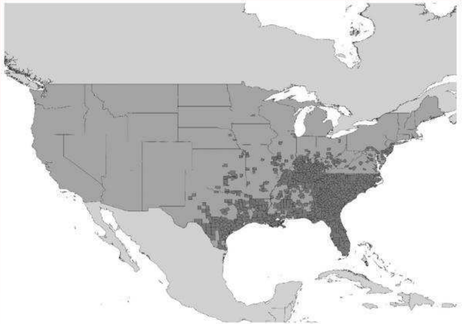
- Paralelní (a tedy i stále složitější) počítače jsou přirozenou odpovědí na nutnost počítání.
- Navíc, jsou obecně (energeticky, prostorově - Groschův zákon (1965)) výhodnější. Byť nám přinášejí nové problémy.



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost rozdělení úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například load balancing)

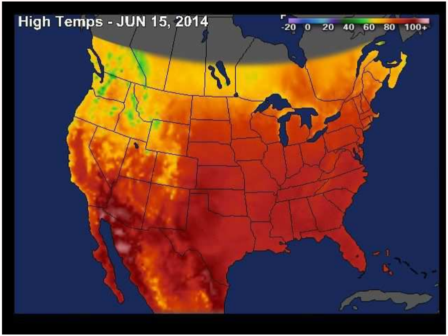
Častá reprezentace úlohy: oblast
(rozšíření komára Aedes Albopictus - tiger mosquito)



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost rozdělení úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například load balancing)

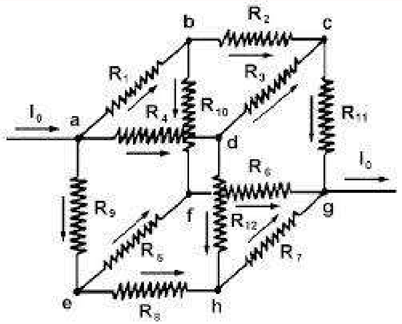
Častá reprezentace úlohy: oblast
(geografické rozložení teplotních maxim v konkrétní čase)



Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost rozdělení úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například load balancing)

Častá reprezentace úlohy: oblast
(propojení v elektrické síti)

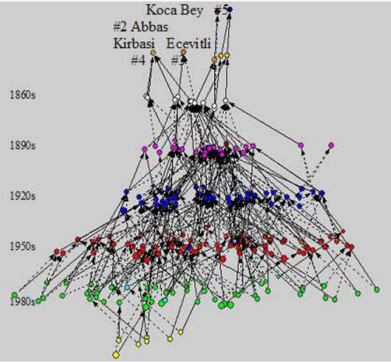


Úvod do problému

- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost rozdělení úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například load balancing)

Častá reprezentace úlohy: oblast

(síť může být složitější - genealogická informace)

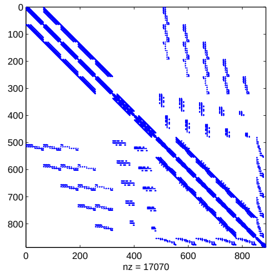


Úvod do problému

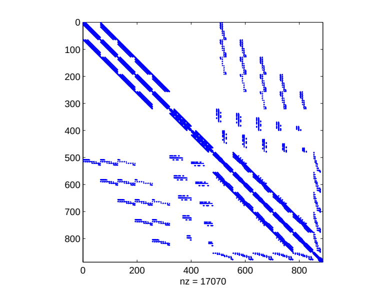
- K efektivnímu počítání na soudobých počítačích tak patří nutnost rozdělení úlohy na podúlohy pro jednotlivé procesory, procesy, části vektorových jednotek atd.
- Pokud možno rovnoměrně (říká se tomu například load balancing)

Schématické zachycení situace: graf

- Graf nám reprezentuje matici (strukturu nulových a nenulových prvků, ale i hodnoty)



Úvod do problému



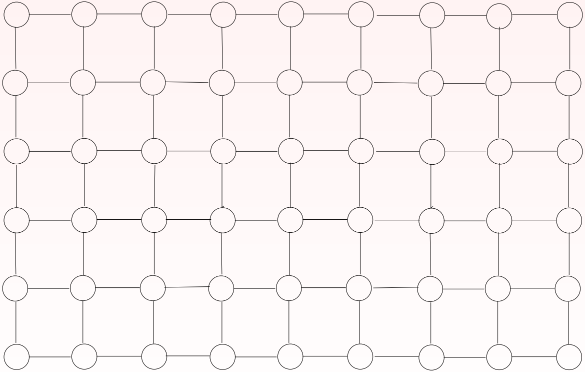
- Říkáme, že matice je řídká
- Dimenze klidně až milióny, miliardy
- Její prvky mohou být vytvořeny přibližnými integrály na malých oblastech, jak jsme je viděli výše.

Souhrnně, "matematika, jak ji zatím známe", je uvnitř, nad ní je "struktura" a nad ní zase matematika, jak ji známe. Ale všechno to je matematika!

Úvod do problému

Schématické zachycení situace: graf

(zde pravidelný, ale viděli jsme; vrcholy, hrany simulují realitu)



Úvod do problému

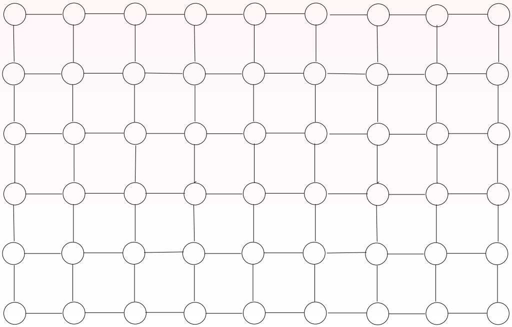
Formulace problému

- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli přiřadit jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
    - Rovnoměrně (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
    - Styk podoblastí (nazývaný separátor) by měl být malý.

Úvod do problému

Formulace problému

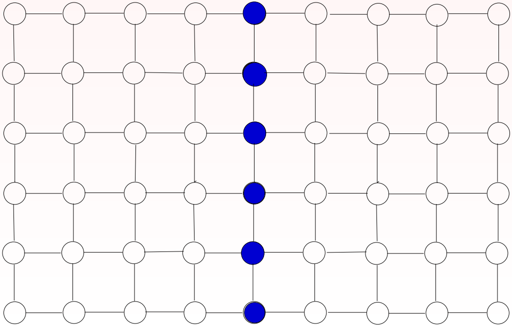
- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli přiřadit jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
  - Rovnoměrně (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
  - Styk podoblastí (nazývaný separátor) by měl být malý.



Úvod do problému

Formulace problému

- Oblast je třeba rozdělit, abychom ji mohli přiřadit jednotlivým procesorům (procesům)
- Jak?
  - Rovnoměrně (pokud procesory budou pracovat podobně efektivně)
  - Styk podoblastí (nazývaný separátor by měl být malý.



Outline

Přemítání o problému

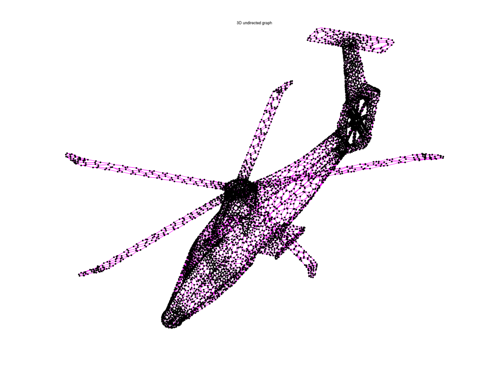
- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...

Přemítání o problému

- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
  - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký realistický.

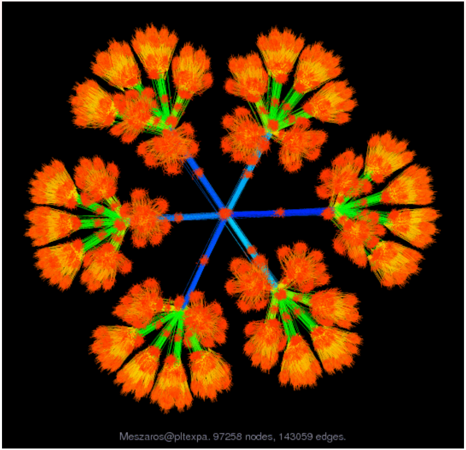
Přemítání o problému

- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně …
  - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký realistický.
  - Například tenhle.



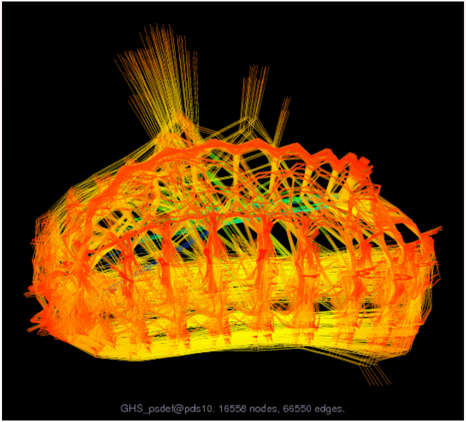
Přemítání o problému

- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
  - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký realistický.
  - A co tento?



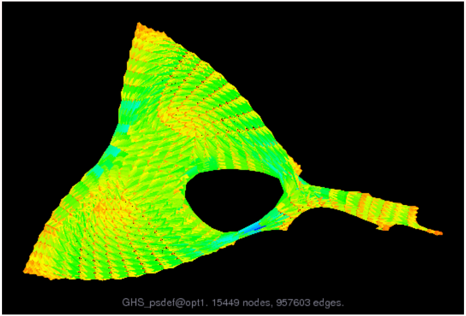
Přemítání o problému

- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
  - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký realistický.
  - Jiný exemplář.



Přemítání o problému

- Když je ten graf pravidelný, asi se nám to povede nějakým způsobem střihnout. (Však to vyjde skoro nastejno. Vždyť jsme to viděli výše.) Ostatně, stejně pořád něco děláme přibližně ...
  - No u toho minulého ano. Ale zkusme si nějaký realistický.
  - A ještě jeden grafík.



Přemítání o problému

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme rozdělit na podoblasti,

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme rozdělit na podoblasti,
- Na podoblastech "počítat" úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třebas komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)

Přemítání o problému

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme rozdělit na podoblasti,
- Na podoblastech “počítat” úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třebas komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)
- Pak to vše nějak dát dohromady.

Přemítání o problému

Shrňme si, co máme

- Oblast potřebujeme rozdělit na podoblasti,
- Na podoblastech "počítat" úlohy, které jsou dány aplikacemi: jednoduché soustavy, ale i třebas komplikované diferenciální rovnice. Možná bude třeba počítat vícekrát (zahrnuje-li model dynamiku procesů)
- Pak to vše nějak dát dohromady.
- Poznámka: paralelní počítání nebylo jedinou a první motivací dělit grafy:
- Například: sériová konstrukce procesorů potřebuje řešení stejného problému - součástky a jejich propojení (např. Kernighan, Lin, Bell Labs, 1969 - 1971)

Přemítání o problému

V každém případě, je zapotřebí hlubší vhled

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek

Přemítání o problému

V každém případě, je zapotřebí hlubší vhled

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
  1. (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?

Přemítání o problému

V každém případě, je zapotřebí hlubší vhled

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
  1. (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
  2. (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat ("rozděl a panuj"), nenadřeme se navíc?

Přemítání o problému

V každém případě, je zapotřebí hlubší vhled

- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
  1. (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
  2. (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat ("rozděl a panuj"), nenadřeme se navíc?
  3. Dva články z roku 1973 patří mezi zakladatelské statě nových podoborů informatiky – počítačové vědy – výpočetní matematiky (dosaďte dle svého uvážení), které na tyto okruhy otázek začaly odpovídat:

     články (1) Miroslava Fiedlera a (2) Alana George

Přemítání o problému

V každém případě, je zapotřebí hlubší vhled

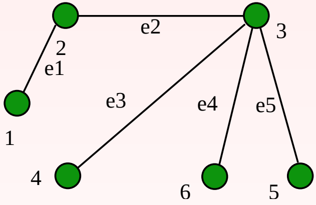
- Konkrétně: Je třeba promyslet odpovědi na dva základní okruhy otázek
  1. (1) Jak automaticky dělit, abychom splnili dva výše uvedené úkoly (rovnoměrnost, minimalitu propojek)?
  2. (2) Když už chceme počítat nejprve odděleně a pak částečné výsledky spojovat ("rozděl a panuj"), nenadřeme se navíc?
  3. Dva články z roku 1973 patří mezi zakladatelské statě nových podoborů informatiky – počítačové vědy – výpočetní matematiky (dosaďte dle svého uvážení), které na tyto okruhy otázek začaly odpovídat:

     články (1) Miroslava Fiedlera a (2) Alana George
  4. Varování pro jedince matematičtější nátury: následující text neobsahuje pro jednoduchost výkladu některé technické předpoklady a může tak i slabším povahám uškodit.

Outline

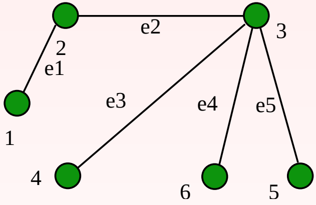
Dělení grafů na části

- Aby se nám dobře se sítěmi a grafy dobře pracovalo, pěkně si je označujeme



Dělení grafů na části

- Aby se nám dobře se sítěmi a grafy dobře pracovalo, pěkně si je označujeme



- A můžeme si je zapisovat do kompaktních tvarů, některým z nichž říkáme matice. Tohle je například matice, nazývaná Laplacián grafu:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ & & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & 1 & \\ & & -1 & & & 1 \end{pmatrix} = D - A$$

Dělení grafů na části

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?

Dělení grafů na části

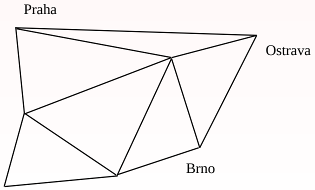
- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý teoretický aparát pro operace s nimi, výrazné zjednodušování počítačových implementací

Dělení grafů na části

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý teoretický aparát pro operace s nimi, výrazné zjednodušování počítačových implementací
- Ad teoretický aparát ... některé vlastnosti matic a tedy i vlastnosti grafů zprostředkovaných maticemi není příliš vidět:

Dělení grafů na části

- Proč si vlastně grafy a sítě do schémat typu matice zapisujeme?
- Důvodů je víc: například: rozvinutý teoretický aparát pro operace s nimi, výrazné zjednodušování počítačových implementací
- Ad teoretický aparát ... některé vlastnosti matic a tedy i vlastnosti grafů zprostředkovaných maticemi není příliš vidět:
  - Skoro násobení: Hledání nejkratších cest mezi všemi vrcholy grafu navzájem se provádí algoritmem, který je velmi blízký maticovému násobení (Floyd (1962), Roy (1959), Warshall (1962))



Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L: Lx.

Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L: Lx.
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $||x||_2$ a $||Lx||_2$.

Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L: Lx.
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $||x||_2$ a $||Lx||_2$.
- Kolikrát může být $||Lx||_2^2 \equiv x^T L^T L x$ větší nebo menší než $||x||_2^2$?

Dělení grafů na části

- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L: Lx.
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $||x||_2$ a $||Lx||_2$.
- Kolikrát může být $||Lx||_2^2 \equiv x^T L^T Lx$ větší nebo menší než $||x||_2^2$?
- Pro Laplacián je odpověď dána druhou mocninou největšího a nejmenšího vlastního čísla λ matice L a příslušnými vlastními vektory.

$$Lx = \lambda x$$

- Vlastní čísla jsou právě takové vlastnosti matice, které nejsou na první pohled vidět, ale naprosto podstatně ji charakterizují.

Dělení grafů na části

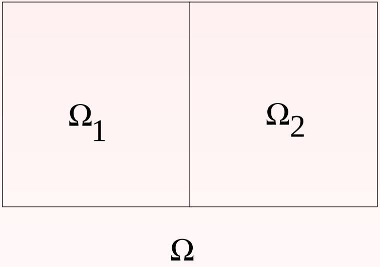
- Opravdické násobení: Uvažujme vektor x a výsledek po vynásobení maticí L: Lx.
- Velikosti x a Lx měříme jejich normami $||x||_2$ a $||Lx||_2$.
- Kolikrát může být $||Lx||_2^2 \equiv x^T L^T Lx$ větší nebo menší než $||x||_2^2$?
- Pro Laplacián je odpověď dána druhou mocninou největšího a nejmenšího vlastního čísla λ matice L a příslušnými vlastními vektory.

$$Lx = \lambda x$$

- Vlastní čísla jsou právě takové vlastnosti matice, které nejsou na první pohled vidět, ale naprosto podstatně ji charakterizují.
- Miroslav Fiedler (1973) ukázal, že druhé nejmenší vlastní číslo Laplaciánu souvisí s dobrou rozdělitelností grafu. Jak to můžeme nahlédnout?

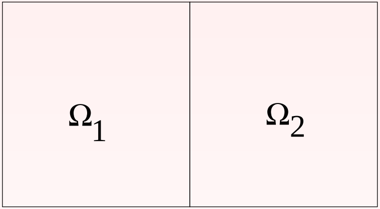
Dělení grafů na části

- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E.



Dělení grafů na části

- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E.



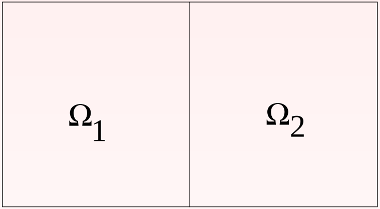
Ω

- Zvolme $x_i = 1$ pro Ω_1 a $x_i = -1$ pro Ω_2. Uvažujme Laplacián grafu.

$$\sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 = 4 \times \text{ počet hran mezi } \Omega_1 \text{ a } \Omega_2$$

Dělení grafů na části

- Mějme graf reprezentující oblast a chtějme jej rozdělit. Jeho hrany označme E.



Ω

- Zvolme $x_i = 1$ pro Ω_1 a $x_i = -1$ pro Ω_2. Uvažujme Laplacián grafu.

$$\sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 = 4 \times \text{ počet hran mezi } \Omega_1 \text{ a } \Omega_2$$

- No ale taky: $x^T L x = x^T D x - x^T A x = \sum_i d_i x_i^2 - 2\sum_{(i,j)\in E} x_i x_j = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2$

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy algebraicky jako problém vlastních čísel.

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy algebraicky jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle diskrétní řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (relaxaci).

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy algebraicky jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle diskrétní řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (relaxaci).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - zase problém vlastních čísel

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy algebraicky jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle diskrétní řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (relaxaci).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - zase problém vlastních čísel
- Ohromný rozvoj oboru po roce 1990 (Pothen, Simon, Liou, 1990; Pothen, Simon, Wang, 1992 atd.); Software (Chaco - Sandia Lab)

Dělení grafů na části

- Dobré dělení grafu najdeme tedy algebraicky jako problém vlastních čísel.
- Pozor na to, že postup od kvadratické formy zpět nenajde obvykle diskrétní řešení, ale pouze jeho spojitou aproximaci (relaxaci).
- Nikoliv náhodná souvislost s hledáním Google algoritmem - zase problém vlastních čísel
- Ohromný rozvoj oboru po roce 1990 (Pothen, Simon, Liou, 1990; Pothen, Simon, Wang, 1992 atd.); Software (Chaco - Sandia Lab)

Miroslav Fiedler - Fiedlerův vektor

Outline

Rozděl a spojuj

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.

Rozděl a spojuj

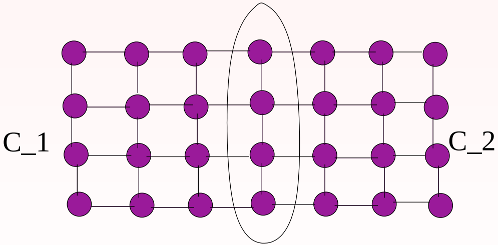
- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
  - Ne. Ba naopak. I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme

Rozděl a spojuj

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
  - Ne. Ba naopak. I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme
  - Do řešení problému totiž vneseme další důležitý prvek, který začal hýbat počítáním hlavně později: Pravidelnost do nepravidelného.

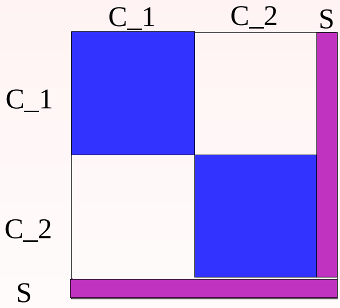
Rozděl a spojuj

- Zopakujme si formulaci našeho druhého problému: když rozdělíme, nebude to na úkor počtu operací? Nebylo by lepší spočítat úlohu najednou.
  - Ne. Ba naopak. I když pomineme fakt, že paralelně (jít) musíme
  - Do řešení problému totiž vneseme další důležitý prvek, který začal hýbat počítáním hlavně později: Pravidelnost do nepravidelného.



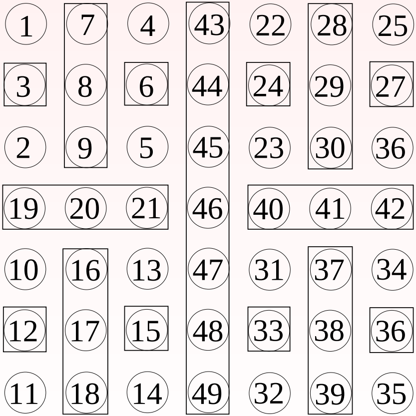
Rozděl a spojuj

Matice po jednom dělení



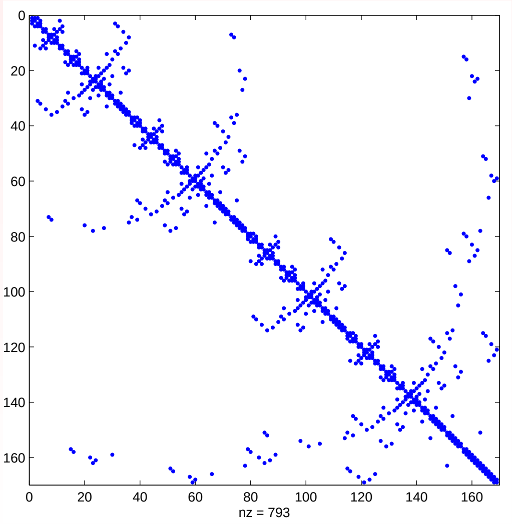
Rozděl a spojuj

Rozdělit můžeme víckrát - rekurzívně



Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: krásňoučká pravidelná matice



Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách

Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím regulovaná řídkost.

Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím regulovaná řídkost.
- Která sice činila potíže klasickým implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...

Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím regulovaná řídkost.
- Která sice činila potíže klasickým implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů pravidelnost hierarchického přístupu.

Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím regulovaná řídkost.
- Která sice činila potíže klasickým implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů pravidelnost hierarchického přístupu.
- Tyto výsledky a následný výzkum velmi silně ovlivnily ohromnou část počítání od konce minulého století.

Rozděl a spojuj

Dělíme vícekrát: ale hlavně:

- Alan George (1973): ukázal, že počet operací s takhle vypadající maticí (při řešení soustavy rovnic) je velmi příznivý - a to je to, co potřebujeme činit ve výše zmíněných úlohách
- Zavedla se tím regulovaná řídkost.
- Která sice činila potíže klasickým implementacím řešičů systémů, ale to je už jiná historie ...
- Ale hlavně zavedla do výpočtů pravidelnost hierarchického přístupu.
- Tyto výsledky a následný výzkum velmi silně ovlivnily ohromnou část počítání od konce minulého století.

Alan George - nested dissection

Outline

Závěr

- Dvacet let od roku 1973 se kombinace efektivního dělení grafů a hierarchické reprezentace matic stává a zůstává absolutně nejužívanějším modelem pro paralelní počítání reprezentované rozkladem oblasti.

Děkuji a Děkujeme.