Raketová rovnice

Michael Zelina

MFF

Ukázky aplikací matematiky

18. září 2016

Obsah

1 Úvod

S vynálezem střelného prachu se někdy v prvním tisíciletí v Číně objevují první rakety, buď jako jakési zbraně, nebo jako součást ohňostrojů. Z přelomu 18. a 19. století je známo několik sofistikovanějších použití raket jako zbraní na raketometných lodích nebo i v pozemních bojích.

Někdy koncem 19. století se začali vědci zabývat raketovým výzkumem na teoretické bázi a vznikla tak kosmonautika jako nové vědecké odvětví. Zmiňme třeba Constantina Ciolkovského (1857-1935), Roberta Goddarda (1882-1945), Hermanna Obertha (1894-1989) a Pedra Pauleta (1874-1945).
Své svými teoretickými pracemi a pokusy začali těsně před první světovou válkou a pokračovali v meziválečném období až do druhé světové války. Jejich práce tedy byla úzce spjata s vojenskými účely pro získání převahy skrze nový vynález.

Postupně zkoušeli různé technické konstrukce a také experimentovali s možnými druhy paliv (nejdříve převážně s tuhými, později se přecházelo ke kapalným). Konstrukčně vyspělou raketou byla německá V-2, které (a její konstruktéry) se po válce snažily získávat jak USA, tak SSSR.
V dalších desetiletích spolu obě velmoci soupeřili v dobývání vesmíru. Ať už skrze vývoj výkonnějších vojenských raket, tak i v nevojenské sféře, jako vývoj nosných raket pro vynášení sond, vysílání družic a v samozřejmě i v podobě pilotovaných letů do vesmíru. To zase vedlo k prohloubení znalostí o vesmíru (skrze např. Hubbleův vesmírný dalekohled).

V této práci se zaměříme na teoretický základ raketových letů. V první řadě odvodíme Ciolkovského rovnici s jejímž objevem se vlastně pojí i vznik celé kosmonautiky. Tuto rovnici (a zní plynoucí vztahy) potom budeme chtít zobecnit začleněním odporových vlivů[1]. Potom se v rámci příkladu podíváme na vlastnosti rakety Saturn V. Z nich spočteme některé technické parametry a porovnáme je s těmi skutečnými.

[1] Samotná Ciolkovské rovnice by dobře fungovala pro lehká tělesa pohybující se už ve vesmíru (mimo atmosféru).

2 Ciolkovského rovnice

Zde standardním způsobem, jako např. v [1], odvodíme Ciolkovského rovnici.

Představme si jednoduchou situaci rakety letící prostorem bez odporu vzduchu a gravitačních vlivů. Raketa je poháněna raketovým motorem, který pracuje na principu akce a reakce. Je tedy naplněn nějakým (pevným, kapalným) palivem, které je zažehnuto a prudce vyvrhnuto ven s výtokovou rychlostí ω[2].

V situaci A máme raketu o hmotnosti m a rychlosti v. Po vyčerpání paliva hmotnosti Δm se dostaneme do situace B. V ní jsou dva objekty, prvním je raketa, nyní již s hmotností $m - \Delta m$ a rychlostí $v + \Delta v$ (spálením paliva získala rychlost) a druhým je zmíněné palivo, které padá pryč od rakety rychlostí $v + \Delta v - \omega$.

Invariantem v našem problému je celková hybnost. Tedy hybnost v situaci A je rovna hybnosti v situaci B a dostáváme tak vztah

$$
\begin{aligned}
p_A &= p_B \\
mv &= \underbrace{(m - \Delta m)(v + \Delta v)}_{raketa} + \underbrace{\Delta m(v + \Delta v - \omega)}_{palivo} \\
mv &= mv + m\Delta v - v\Delta m - \Delta m\Delta v + v\Delta m - \omega\Delta m \\
0 &= m\Delta v - \Delta m\Delta v - \omega\Delta m \\
m\Delta v &= \Delta m\Delta v + \omega\Delta m \ .
\end{aligned}
$$

Definujme si rychlost hoření paliva, kterou označíme písmenem q (povede především ke zkrácení zápisu). budeme předpokládat, že je tato rychlost po celou dobu konstantní. Platí tedy (používáme standardní fyzikální notaci)

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} \ .$$

Naši rovnici upravíme tak, aby se tam vyskytovala tato veličina

$$
\begin{aligned}
m\Delta v &= \frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v\Delta t + \omega\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta t \\
m\Delta v &= q\Delta v\Delta t + \omega q\Delta t \ .
\end{aligned}
$$

Teď celou rovnici vydělíme hodnotou (nenulovou) Δt a dostaneme

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = q\Delta v + \omega q \ .$$

Použijeme limitní přechod $\Delta t \to 0$ a máme tak

$$
\begin{aligned}
m \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}_{\to \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} &= q \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta v}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \omega q}_{\to \omega q} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \omega q \ .
\end{aligned}
$$

[2] Používá se také veličina specifický impuls, značíme I_{sp}, udávaná v sekundách. V našem značení potom platí $\omega = gI_{sp}$, kde g je tíhové zrychlení. V některých zdrojích se ale udává v $N \cdot s/kg$, což má rozměr rychlosti a potom je tento specifický impuls zároveň roven výtokové rychlosti.

Nalezli jsme tak jednu pohybovou rovnici rakety. Připomeňme, že hmotnost, která zde vystupuje je ve skutečnosti funkcí času, tj. $m = m(t)$. Tuto skutečnost tedy je třeba ještě zohlednit.

Vztah se dá snadno nahlédnout. Máme-li na počátku hmotnost m_0, která konstantní rychlostí klesá v závislosti na rychlosti hoření q, tak musí platit

$$m(t) = m_0 - qt \ .$$

Pokud bychom uvažovali nelineární závislost, tak by byl tento vztah vcelku snadno modifikovatelný.

Pohybová rovnice rakety je nyní tedy ve tvaru

$$(m_0 - qt)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q\omega \ .$$

Z ní můžeme rychle dovodit Ciolkovského rovnici tím, že rovnici upravíme a zintegrujeme přes dobu trvání pohybu (od 0 do nějakého okamžiku τ). Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{q\omega}{m_0 - qt} \\
v(\tau) &= \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^\tau \frac{q\omega}{m_0 - qt}\mathrm{d}t \quad \begin{vmatrix} m_0 - qt & = x \\ -q\mathrm{d}t & = \mathrm{d}x \end{vmatrix} = \\
&= -\omega \int_{m_0}^{m_0 - q\tau} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\omega \log(m_0 - q\tau) + \omega \log m_0 = \\
&= \omega \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} \ .
\end{aligned}$$

Krátce se zamyslíme nad tím, kdy má sepsané řešení smysl. V prvním kroku jsme dělili výrazem $(m_0 - qt)$ a ten je jistě nenulový až do okamžiku, kdy je vlastně spálená celá hmotnost rakety, ale to se nikdy nestane, protože palivo tvoří pouze část (byť značnou) celé hmotnosti. A logaritmus ve výsledku je v celém našem problému kladný, jelikož hmotnost pouze klesá, a argument $\frac{m_0}{m_0 - q\tau}$ je tedy vetší než 1. Takže všechno, co jsme provedli bylo bezesporné.

S touto rovnicí se také můžeme setkat v ekvivalentním tvaru

$$m_0 - g\tau = m_0 e^{-v(\tau)/\omega} \ ,$$

což nám zachycuje změnu hmotnosti v průběhu pohybu (levá strana je totiž hmotnost v daném okamžiku τ). V obou tvarech je dobře vidět, že pokud si určíme nějakou cílovou rychlost rakety, tak ta je závislá na poměru počáteční a konečné (po spálení paliva) hmotnosti. Na druhou stranu je tato závislost logaritmická, takže teoreticky je možné dosáhnout libovolné rychlosti pouze zvyšováním tohoto poměru, ale jelikož funkce logaritmus roste vcelku pomalu, tak brzo narazíme na technické překážky (tj. jak zvyšovat daný poměr).

Pokud ještě jednou danou pohybovou rovnici zintegrujeme (přes čas), tak dostaneme rovnici udávající závislost uražené dráhy na čase (v poslední úpravě využijeme toho, že se tam vyskytuje již spočtený integrál):

$$x(\tau) = \int_0^\tau v(t)\mathrm{d}t = \omega \int_0^\tau \log \frac{m_0}{m_0 - qt}\mathrm{d}t \quad \left| \begin{array}{cc} u = \log \frac{m_0}{m_0-qt} & u' = \frac{\frac{m_0 \cdot q}{(m_0-qt)^2}}{\frac{m_0}{m_0-qt}} = \frac{q}{m_0-qt} \\ v' = 1 & v = t \end{array} \right| =$$

$$= \omega\tau \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} - \omega \int_0^\tau \frac{qt}{m_0 - qt}\mathrm{d}t =$$

$$= \omega\tau \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} + \omega \int_0^\tau \frac{m_0 - qt - m_0}{m_0 - qt}\mathrm{d}t =$$

$$= \omega\tau \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} + \omega\tau - \frac{m_0}{q} \int_0^\tau \frac{q\omega}{m_0 - qt}\mathrm{d}t =$$

$$= \omega\tau \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} + \omega\tau - \frac{m_0}{q} \cdot \omega \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} \; .$$

Což ještě přepíšeme do pěknějšího tvaru

$$x(\tau) = \frac{\omega}{q} \left[q\tau + (q\tau - m_0) \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} \right] \; .$$

3 Zobecnění

Zatím jsme odvodili chování rakety za předpokladu nulových odporových sil (typicky gravitace a odpor vzduchu). Tyto vlivy nyní do našich rovnic zakomponujeme. Klíčová pro nás byla rovnost

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q\omega \ .$$

Na obou stranách zde vystupují veličiny, které rozměrově dávají sílu. Budeme uvažovat, že odporové síly (označme zatím F) působí přesně proti směru pohybu. Tato síla F má tedy přesně opačný směr směr oproti síle, která je určena součinem $q\omega$. Výsledný vztah tedy bude

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q\omega - F \ .$$

Jinými slovy, přítomností odporových sil musí raketa generovat menší zrychlení. Navíc v rovnici je už započítán směr, takže ji nemusíme rozepisovat vektorově.

Za složky síly F vezmeme sílu tíhovou a odporovou[3], tj.

$$F = F_g + F_o = mg\sin\theta + \frac{1}{2}C_r S\rho v^2 \ ,$$

kde g je tíhové zrychlení na Zemi, θ je úhel naklonění rakety v průběhu letu, ρ je hustota vzduchu, S je plocha, která je vystavena odporové síle a C_r je součinitel odporu, který popisuje tvar a kvalitu materiálu (tj. rakety).

Všechny proměnné (kromě C_r) jsou striktně vzato závislé na čase. Pokud bychom tedy měli integrovat, podle času, takovýto výraz, tak bychom se moc daleko nedostali. Naším cílem nyní bude nějakým způsobem tyto závislosti zjednodušit.

V první řadě budeme považovat za konstantní tíhové zrychlení g a také plochu S (i když má raketa více stupňů, tak ty jsou podobné konstrukce).

3.1 Sklon a hustota

Sklon rakety není úplně snadné určit, protože se v průběhu letu mění. Například ze začátku letu letí rakety obvykle skoro rovně nahoru, aby překonaly nejhustší část atmosféry a teprve potom se nakloní. Tento úhel orientačně určíme z informace o výšce a vzdálenosti od místa startu (uražená dráha je tedy v prvním přiblížení přeponou takového trojúhelníku).

Hustota ρ je v tomto případě závislá na čase (protože raketa prochází různými vrstvami atmosféry). Buď najdeme funkci, která popisuje tuto závislost hustoty vzduchu na výšce, nebo vezmeme nějaký odhad (a to raději horší než je skutečnost) a tím zbavíme hustotu závislosti na čase (respektive výšce a teplotě).

[3]Kvantifikovanou klasickým Newtonovým zákonem odporu. V některých specifických případech se používají i jiné způsoby, např. v případě pohybu koule nízkou rychlostí skrze kapalinu je možné použít Stokesův zákon.

Například v troposféře (od povrchu k cca 15 km - závisí na zeměpisné šířce) by taková závislost měla vztah

$$\rho = \frac{p_0 M}{RT} \left(1 - \frac{Lh}{T_0}\right)^{\frac{gM}{RL}} \quad ,$$

kde p_0 je standardní atmosférický tlak, M je molární hmotnost, R je molární plynová konstanta, L je rychlost poklesu teploty s rostoucí výškou, h je výška a T je teplota, pro kterou platí $T = T_0 - Lh$, T_0 je teplota u hladiny moře.

Funkční model atmosféry (tzv. U.S. Standard Atmosphere) je detailně rozebrán v [2] a vztahy, ze kterých se dá dostat k uvedenému vzorci, jsou postupně rozváděny na stránkách 1 až 15. Dobré informace také můžeme získat na wikipedii pod hesly „Density of air" a „Barometric formula".

Takže je jasné, že zakomponovat do našich vztahů takovouto závislost by bylo v plné obecnosti dost nepříjemné. Zkusíme identifikovat situace za kterých by bylo možné časovou závislost nějakým způsobem odstranit.

3.2 Těžké rakety

V případě velmi hmotných raket (řádově i tisíce tun) bude hlavním příspěvkem k síle F tíhová složka. A jak nám v konkrétním případě potvrdí výpočet podílu (uvažuji $\sin\theta \approx 0,5$, čísla pro ilustraci)

$$\frac{F_o}{F_g} = \frac{\frac{1}{2} C_r S \rho v^2}{mg \sin\theta} = \frac{0,5 \cdot 80 \cdot 0,05 \cdot 10^6}{10^6 \cdot 9,8 \cdot 0,5} \approx 0,1 \ ,$$

tak při vcelku průměrném odhadu odporové síly (hustota je z výšky okolo 23 km), bude tato síla pouze menší částí tíhové síly (do velikosti). Typicky bude mít tíhová síla příspěvek v řádu tisíce metrů za sekundu k celkové rychlosti, a tedy odporová pouze v řádu desítek. Takže v tomto případě můžeme, vcelku efektivně, F_o nahradit násobkem síly F_g. Případně hodnoty spočítáme úplně bez tohoto příspěvku a pak se podíváme jaké velikosti by tato oprava dosahovala a můžeme ji zohlednit.

Ale je zase pravda, že odporová síla bude (relativně) výrazná v prvních fázích letu a naproti tomu v konečné fázi bude výrazně potlačená (tahle fáze potrvá i nejdéle). Takže takový odhad zkreslí spočtené hodnoty výšky a rychlosti na začátku a konci.

Odvození vztahů v tomto případě je už snadné.
Uvažujme tedy $F = kF_g$, potom podobně jako dříve platí

$$\begin{aligned} m(t) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= q\omega - m(t) kg \sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{q\omega}{m(t)} - kg \sin\theta \\ v(\tau) = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t &= \omega \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} - \tau kg \sin\theta \end{aligned}$$

$$x(\tau) = \int_0^\tau v(t) \mathrm{d}t = \frac{\omega}{q} \left[q\tau + (q\tau - m_0) \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} \right] - \frac{\tau^2 kg}{2} \sin\theta \ .$$

3.3 Lehké rakety

Případ lehčích raket pro nás bude typicky asi méně zajímavý (důležitější jsou ty těžší, kvůli vynášení nákladu do kosmu). Zde se v nějaké fázi letu může stát, že odporová síla je i několikanásobně větší než tíhová. Tíhová je ale zase výrazně menší než v předchozím případu. Jedna možnost by byla použít stejný trik jako předtím a získat, tak interval možných hodnot. Ale v tomto případě bude zřejmě dost široký, a tak se toho vlastně moc nedozvíme.
Další možností je nepovažovat hustotu za konstantní po celou dobu pohybu, ale rozdělit pohyb po jednotlivých hladinách s různými hustotami v každé z nich. Například do 5 km bychom přiřadili hustotě nějakou hodnotu, pak do 15 km atd. V tomto postupu tedy budeme znát výšku, z ní dovodíme uraženou dráhu, z té dopočítáme čas a rychlost (ze soustavy rovnic). Tohle už bude docela přesné, ale pro ruční výpočty (jako v této práci) poněkud zdlouhavé. Tento postup je samozřejmě možný i pro předchozí případ.

Jestliže chceme opět najít vzorce pro rychlost a dráhu, tak vyjdeme ze vztahu

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q\omega - mg\sin\theta - \frac{C_r S\rho}{2} v^2 \ .$$

Rovnost trochu upravíme a rozepíšeme i informace o proměnných

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) &= \frac{q\omega - gm(t)\sin\theta}{m(t)} - \frac{C_r S\rho}{2} v^2(t) \\ v'(t) &= \frac{q\omega - g(m_0 - qt)\sin\theta}{m_0 - qt} - \frac{C_r S\rho}{2} v^2(t) \ . \end{aligned}$$

Je vidět, že abychom nalezli velikost rychlosti v závislosti na čase, tak potřebujeme vyřešit rovnici

$$v'(t) = A(t) - Bv^2(t) \ .$$

Jde o speciální typ nelineární diferenciální rovnice prvního řádu, tzv. Riccatiho diferenciální rovnice. Ta se dá řešit nalezením partikulárního řešení v^*, potom použitím substituce $v = v^* + \frac{1}{u}$ přejdeme k řešení rovnice ve tvaru

$$u' - 2Bv^* \cdot u = B \ ,$$

což je už vcelku dobře řešitelné a konečné řešení vyplyne z použité substituce.

Problémem bývá právě nalézt ono partikulární řešení. O obecném řešení problému je více například v [3] a v [4]. Případně je možné použít jiné (i numerické) metody, jak celé řešení nalézt. Potom už je také možné určit uraženou dráhu rakety.

Tímto se již nebudeme dále zabývat, protože to poněkud přesahuje rámec této práce. Raději se podíváme na konkrétní příklad.

4 Saturn V

Na přelomu 60. a 70. let proběhlo několik letů třístupňové, nosné rakety Saturn V[4]. Tato raketa má velmi snadno dostupné technické specifikace, které jsou navíc podrobné, např. [5], [6], [7].

Pro aplikaci toho, co jsme odvodili postačí ověřit výsledky například do okamžiku oddělení prvního stupně rakety. K tomu mělo dojít po $\tau = 160$ sekundách od odlepení od Země (a po celou dobu bylo spalováno palivo). Hmotnost celé rakety i s palivem je $m_0 = 2\ 970$ tun. Dojde ke spálení celkem 2160 tun paliva, takže hmotnost rakety klesne na 810 tun (těsně před oddělením kusu rakety). Rychlost hoření tedy je $q = 13,5$ tun za sekundu. Výtoková rychlost je $\omega = 2,58$ kilometrů za sekundu (specifický impuls je 263 s). Průměr rakety je kolem 10 metrů.

Po 160 sekundách má raketa dosáhnout přibližně rychlosti 2 300 m/s, výšky okolo 67 km a odchýlí se asi o 93 km od místa startu.

Pokud použijeme pro nalezení neznámého úhlu θ hrubý odhad jako poměr odvěsen v trojúhelníku, tak bude $\tan\theta = \frac{67}{93}$ a tedy $\sin\theta \approx 0,58$ (okolo 36 stupňů). Plocha $S = \pi r^2 \approx 80\ \mathrm{m}^2$. Součinitel odporu $C_r = 0,5$.

Potřebujeme odhadnout velikost odporové síly (a podle toho zvolit metodu řešení). Jako spodní odhad použijeme poměr odporové a tíhové síly na konci (ve výšce 67 km je hustota vzduchu cca. 0,000 1 kg/m^3)

$$\frac{F_o}{F_g} = \frac{C_r \cdot S \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot \sin\theta} = \frac{0,5 \cdot 80 \cdot 0,000\ 1 \cdot 2500^2}{2 \cdot 810\ 000 \cdot 9,8 \cdot 0,58} = 0,27\% \ .$$

Pro horní odhad použijeme hodnoty, které budou vidět ve vzorci (hustota ve výšce asi jen 8 km, ale s už dost velkou částí paliva spálenou)

$$\frac{F_o}{F_g} = \frac{C_r \cdot S \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot \sin\theta} = \frac{0,5 \cdot 80 \cdot 0,5 \cdot 500^2}{2 \cdot 2\ 000\ 000 \cdot 9,8 \cdot 0,58} = 22\% \ .$$

To je samozřejmě dost hrubé, protože tušíme, že raketa bude poměrně brzo v takové výšce, že se příspěvek odporové síly jistě nebude blížit dvaceti procentům. Když bychom dokonce místo 500 dali třeba 700, tak se dostaneme ke skoro 50 %, ale při takové rychlosti už bude raketa jistě v takové výšce, ve které už hustota bude znatelně menší, tj. tak, že „přebije“ druhou mocninu rychlosti. Položme tedy $F_o = 0,2F_g$ (tj. 20 %).

[4]Vynášely kosmické lodě Apollo, včetně Apolla 11, které přistálo na Měsíci.

Teď už stačí přímo použít odvozené vztahy

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \omega \log \frac{m_0}{m_0 - q\tau} - \tau k g \sin\theta \\ x(\tau) &= \frac{\omega}{q}\left[q\tau + (q\tau - m_0)\log\frac{m_0}{m_0 - q\tau}\right] - \frac{\tau^2 k g}{2}\sin\theta \end{aligned}$$

$$v(160) = \underbrace{2\ 580 \cdot \log \frac{2\ 970}{810}}_{3\ 352\ \mathrm{m/s}} - \underbrace{160 \cdot 1,2 \cdot 9,8 \cdot 0,58}_{1\ 091\ \mathrm{m/s}} = 2\ 260\ \mathrm{m/s}$$

$$x(160) = \underbrace{\frac{2\ 580}{13,5}\left[2\ 160 - 810 \cdot \log\frac{2\ 970}{810}\right]}_{211{,}67\ \mathrm{km}} - \underbrace{160^2 \cdot 0,5 \cdot 1,2 \cdot 9,8 \cdot 0,58}_{87{,}3\ \mathrm{km}} = 124,4\ \mathrm{km}\ .$$

V našem přiblížení skutečného problému představuje uražená dráha vlastně přeponu trojúhelníku se stranami 67 a 93 a ta je podle Pythagorovy věty dlouhá asi 114,5 km.

První číslo je hodnota, kterou bychom dostali z Ciolkovského rovnice a to druhé je naše první oprava plynoucí ze započítání odporových sil. Rychlost vyšla až překvapivě velmi přesně, dráha až tak přesná nebyla, ale na druhou stranu tady se přímo projevuje náš hrubý odhad sklonu. Pro obě veličiny tedy vyšly hodnoty ze kterých se dá udělat mnohem přesnější představa.

5 Závěr

V práci jsme s využitím elementárních nástrojů nejdříve popsali chování rakety v ideálním prostředí. Potom jsme se pokusili zakomponovat do tohoto modelu významné vlivy, které v průběhu letu působí. V případě gravitačních účinků se nám to podařilo v zásadě bez problémů. Ohledně odporu vzduchu jsme narazili na komplikace, které by obecné řešení takové problému nutně obsahovalo. Proto jsem zkoumali, jak nahradit obecnou závislost něčím snadněji popsatelným (a počitatelným). Takto jsme nakonec popsali, jak postupovat v jednotlivých situacích (na které jsme původní problém převedli). Na konci jsme si ukázali, zda výsledky, ke kterým jsme takto došli, popisují skutečnost skutečně přesněji (a jak moc je toto zpřesnění významné) než původní popis v ideálním prostředí.

Práce se dá potenciálně dále rozšířit. V první řadě se nabízí zpřesnění jednotlivých přiblížení, která jsme provedli. Jako určení úhlu sklonu (které ve skutečnosti není konstantní) nebo vypořádání se s měnící se hustotou vzduchu. Možná se pokusit řešit Riccardiho rovnici ke které jsme došli.
Dále by to byly problémy hledání nejefektivnějšího sklonu v průběhu letu nebo také hledání nejvhodnějšího složení paliva (které ovlivní zmíněný specifický impuls) a případně také počet a velikost jednotlivých stupňů, aby byl let (opět) co nejefektivnější.

Reference

[1] Didier Levavasseur : The Tsiolkovsky formula
`http://www.astrosurf.com/levavasseur/`

[2] U.S. Standard Atmosphere, 1976
`https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539.pdf`

[3] Yimin Yan : The General Solutions of Linear ODE and Riccati Equation
`http://arxiv.org/abs/1006.4804`

[4] S. BALAJI : Solution of nonlinear Riccati differential equation using Chebyshev wavelets
`http://www.wseas.org/multimedia/journals/mathematics/2014/a125706-412.pdf`

[5] Robert A. Braeunig : Saturn V Launch Simulation
`http://www.braeunig.us/apollo/saturnV.htm`

[6] M. Nealon : Rocket Science
`http://www.mnealon.eosc.edu/RocketSciencePage5.htm`

[7] Saturn V
`https://en.wikipedia.org/wiki/Saturn_V`