

Stabilní párování

Úvod

Asi nejčastěji se ve světě k přidělu surovin používá systém cen, ale co v případech, kdy nelze použít peněz k získání toho, co chceme? Konkrétně například spárování nemocničních stážístů s nemocnicemi či nemocničními odděleními, přidělení správných orgánů pacientům, přijímání studentů univerzitami a tak dále. (V praxi i v těchto případech lze použít peníze, nicméně by to bylo nemorální či dokonce nezákonné.)

[4] **Definice 1:** Necht' $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ a $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ jsou množiny. Párováním nazveme takové zobrazení $\mu: M \cup Z \rightarrow M \cup Z$, pro které platí: $\mu(z_i) = m_j$ právě tehdy, když $z_i = \mu(m_j)$, a pro každé m a z buďto $\mu(z)$ náleží M nebo $\mu(z) = z$ a symetricky $\mu(m)$ náleží Z nebo $\mu(m) = m$.

Což znamená, že členové jedné strany jsou přiřazeni členům strany druhé nebo sami sobě a když m je přiřazeno z , tak z je přiřazeno m .

Párování lze rozdělit na jednostranné a oboustranné, co to znamená je popsáno níže, matematická znění a řešení problému i s příklady jsou zvláště uvedena pro jednostranné a oboustranné párování, na závěr je uvedeno, jak tyto algoritmy udělaly svět o trochu lepším a čím si myslím, že by mohly dále pomoci.

Oboustranné párování je takové párování, kde členové jedné strany, například pracující, musí být přiřazeni k členům druhé strany, například zaměstnavatelům, a přitom obě strany mají jisté preference toho, v jakém páru by chtěli být.

Jednostranné párování je použito ve chvíli, kdy se pouze jedna strana aktivně podílí na vytvoření finálního přiřazení, kupříkladu přidělování pokojů na koleji studentům. Významným příkladem jednostranného párování je výměna ledvin.

Oboustranné párování:

Existuje vícero způsobů, kterými lze oboustranné párování řešit, jeden z nejzákladnějších modelů je takzvaný model svated, kde každá například *firma* hledá pouze jednoho *zaměstnance*. Platy, které firmy nabízejí zaměstnancům, mohou být zahrnuty v preferencích zaměstnanců.

Touto problematikou se zabývali matematici a ekonomové David Gale a Lloyd Shapley, v roce 1962 uveřejnili "deferred acceptance algorithm", česky by se to dalo přeložit jako algoritmus odložených přijetí. Algoritmu se také někdy říká Gale-Shapley algorithm. Tento algoritmus je popsán a využit v důkazu věty 1.

V matematickém znění problému jsou bez újmy na obecnosti firmy reprezentovány muži a zaměstnanci reprezentovány ženami.

[4] Matematické znění problému:

Mějme dvě oddělené množiny: muži = $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ a ženy = $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, kde každý má striktní uspořádání preferencí (def. 2 (ii)) členů strany druhé. Má-li například m_i na prvním místě z_3 a na druhém místě z_4 , pak tento fakt lze vyjádřit zápisem $z_3 \succ_{m_i} z_4$ a tak dále, až do doby, kdy by raději zůstal sám, tento fakt vyjádříme tak, že je přiřazen sám sobě, tady $P(m_i) = (z_3, z_4, \dots, m_i)$.

[4] Definice 2:

- (i) Řekneme, že párování je nepřijatelné, jestliže člen k libovolné strany by raději zůstal sám, než aby byl přiřazen členu j , tedy $k \succ_k j$.
- (ii) Řekneme, že k má striktní preference, jestliže není lhostejný mezi jakýmkoli dvěma přijatelnými členy a není mu jedno, jestli bude spárován či nespárován.
- (iii) Párování μ je blokováno členem k , jestliže k by byl raději sám, než aby byl přiřazen $\mu(k)$, tedy $k \succ_k \mu(k)$.
- (iv) Párování μ je blokováno párem členů (m, z) , jestliže se preferují navzájem místo partnerů, které jim μ přidělilo, tedy $z \succ_m \mu(m)$ a $m \succ_z \mu(z)$.
- (v) Párování je stabilní, jestliže není blokováno žádným jedincem nebo párem.

Řešení:

[2] Věta 1. (Gale-Shapley, 1962):

Vždy existuje stabilní párování.

[2] Důkaz: Věta je důsledkem toho, že algoritmus odložených přijetí vždy najde stabilní párování.

Popis algoritmu odložených přijetí, pánská volenka:

Krok 0: Jestliže některé preference nejsou striktní, svévolně uspořádejme lhostejné členy.

Krok 1: A) Každý muž učiní nabídku ženě, která je pro něj nejpreferovanější volbou.

B) Každá žena odmítne nepřijatelné návrhy a z přijatelných podrží (je důležité, že nabídky nejsou přijímány ihned, ale pouze podrženy) ten nejpreferovanější.

Krok k : A) Každý muž, který byl odmítnut v $k-1$ kroku, učiní nabídku své nejpreferovanější ženě, kterou doposud nepožádal.

B) Každá žena podrží nejpreferovanější nabídku z nabídek, které obdržela v k -tém cyklu a z té, kterou právě drží a zbytek odmítne.

Konec: Žádné návrhy již nejsou činěny, poté jsou nabídky přijaty a námluvy jsou u konce.

[2] Konečnost: Algoritmus je zřejmě konečný, neboť každý muž požádá každou ženu maximálně jednou. V případě, že $M = Z$ to znamená, že každý muž bude spárován s nějakou ženou a každá žena bude spárována s nějakým mužem. V případě, kdy $M < Z$ procedura končí ve chvíli, kdy všechny ženy byly požádány a v případě $M > Z$, kdy je každý muž buď s nějakou ženou (ve smyslu, že ta žena drží jeho nabídku), nebo byl všemi pro něj přijatelnými ženami odmítnut.

[2] Proč algoritmus odložených přijetí vždy najde stabilní páry?

Uvažujme, že pánská volenka již proběhla, nechť jeden pár sestává z Adama a Alice a jiný pár je tvořen Zdeňkem a Zuzanou. Řekněme, že Zdeněk by byl raději s Alicí než se Zuzanou, půjde tedy za Alicí a řekne: "Alice buď se mnou.", jenže Alice ho odmítne, to víme proto, že v průběhu algoritmu musel Zdeněk Alici požádat a zároveň musel být následovně odmítnut, protože Alice dává přednost Adamovi před Zdeňkem. Páry utvořené tímto algoritmem jsou tedy stabilní.

[1] **Příklad 1:** Mějme čtyři mediky : 1, 2, 3 a 4 a čtyři lékařská oddělení: Chirurgii (C), Dermatologii (D), Gastroenterologii (G) a Pediatrii (P). Každý medik má uspořádání preferencí jednotlivých lékařských oddělení, a to následovně (lze reprezentovat i maticově):

1: C>G>D>P

2: C>D>G>P

3: C>G>P>D

4: D>P>G>C

Lékařská oddělení mají rovněž své uspořádání preferencí:

C: 4>3>2>1

G: 4>1>3>2

D: 1>2>4>3

P: 2>1>4>3

Jak stabilně přidělit mediky jednotlivým oddělením?

Řešení: V prvním kole nabídne chirurgické a gastroenterologické oddělení stáž studentu 4, dermatologie studentu 1 a pediatrie studentu 2, 4 podrží nabídku od gastroenterologie, jelikož jí dává přednost před chirurgií a nabídku od chirurgie odmítne. V druhém kole chirurgické oddělení nabídne stáž studentu 3, který ji s radostí přijme a algoritmus je u konce. Finální sestava vypadá tedy takto : 1 → D, 2 → P, 3 → S, 4 → G.

[4] **Věta 2.**

Za předpokladu, že všechny ženy a všichni muži mají striktní preference, existuje M - optimální a Z - optimální párování.

M - optimální znamená, že každý muž pro sebe dostane tu nejlepší možnou ženu, kterou by mohl mít ve stabilním párování, na úkor toho, že každá žena dostane toho nejhoršího partnera, kterého by mohla mít ve stabilním párování. Z - optimální se definuje opačně.

[3] **Důkaz:**

Důkaz pro M - optimální případ rozdělíme na dvě části:

- (I) Každý muž dostane nejlepší stabilní partnerku
- (II) Každá žena dostane nejhoršího stabilního partnera

ad (I): Předpokládejme libovolné provedení algoritmu E, které nám vydá stabilní párování μ , dále pro spor předpokládejme, že existuje stabilní párování μ' a muž m , takový, že m preferuje $w' = \mu'(m)$ před $w = \mu(m)$. Potom během E w' musela odmítnout m . BÚNO jednalo se o první odmítnutí v E a w' odmítla m , protože chtěla být s m' (tedy w' dává přednost m' před m). Potom m' dává přednost w' před svojí partnerkou $v \in \mu'$ (protože žádná žena předtím neodmítla stabilního partnera) a tedy párování μ' je blokováno párem (m', w') . Každý muž m je tedy v μ přiřazen své nejoblíbenější stabilní partnerce w .

(Důkaz je téměř shodný s důkazem stability párů ve větě 1., ale je popsán více matematicky.)

ad(II): Předpokládejme opak. Buď μ_M M-optimální stabilní párování a předpokládejme, že existuje stabilní párování μ' a žena w taková, že w preferuje $m = \mu_M(w)$ před $m' = \mu'(w)$. Potom ale (m, w) blokuje párování μ' , ledaže by m preferoval $\mu'(w)$ před $w = \mu_M(w)$, což je ve sporu s faktem, že m nemá žádného stabilního partnera lepšího než v μ_M .

[1] **Příklad 2:** Uvažujme situaci z prvního příkladu, nyní si ale medicí vybírají oddělení. V prvním kole studenti 1, 2 a 3 učiní nabídku C, student 4 učiní nabídku D. Jelikož S preferuje studenta 3, tak podrží jeho nabídku a odmítne 1 a 2. V druhém kole 1 učiní nabídku G a 2 učiní nabídku D. Jelikož D dává přednost 2 před 4, tak 4 odmítne. Ve třetím kole 4 učiní nabídku P. Nyní jsou všichni přiřazeni a studenti mohou být přijati, konečné seřazení je: 1 → G, 2 → D, 3 → S, 4 → P.

Jako zajímavost bych ještě rád uvedl, že neexistuje žádný stabilně párovací mechanismus, ve kterém by pro všechny bylo výhodné uvádět své pravdivé preference (i když pro uvedení správných nepravdivých preferencí musí mít lhář k dispozici informace o preferencích jeho kolegů). A že v M - optimálním párování (na základě uvedených preferencí) je pro všechny muže výhodné uvést své skutečné preference.

Jednostranné párování

Jeden ze základních modelů jednostranného párování byl představen ekonomy Herbertem Scarfem a Lloydem Shapleyem, roku 1974 v jejich článku "On cores and indivisibility" uvedli takzvaný "top trading cycle (TTC)", česky by se to dalo přeložit jako nejlepší výměnný cyklus (případně kružnice, protože cyklus v názvu se významově shoduje s kružnicí v teorii grafů).

[1] **Definice 3:** Bud' $N = \{1, 2, \dots, n\}$ množina n jednotlivců, například obchodníků. Skupinu jednotlivců, kteří spolu spolupracují nazveme koalici. Speciální případy koalic jsou velká koalice, která je tvořena n členy a "jedináčkovská" koalice, která je tvořena pouze jedním členem.

[8] **Definice 4:** Jádrem nazveme množinu všech proveditelných přiřazení takových, že žádná koalice si nemůže přilepšit.

[1] Model: Mějme n obchodníků, každý z nich vlastní jednu nerozdělitelnou surovinu, která je nazvána domem a každý z nich má své striktní preference ohledně domů ostatních obchodníků, zároveň každý obchodník má užitek pouze pro jeden dům.

[5] Matematicky: Bud' $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ množina obchodníků a $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ množina domů, kde obchodník a_i vlastní dům d_i . Striktní preference jednotlivých obchodníků a jsou reprezentovány uspořádáním \succ_a . Přiřazení $\mu: A \rightarrow D$ je funkce, která říká, kdo dostane co, $\mu(a_i)$ je dům, který obchodník a_i dostane v přiřazení μ .

Přidělením μ se tedy myslí vhodné spárování domů a obchodníků takové, že každý obchodník dostane právě jeden dům, navíc výměny nemusí být pouze dvoustranné (pěkným příkladem je film Kulový blesk). Přiřazení μ je v jádru, jestliže žádná koalice obchodníků si nemůže přilepšit vyměněním jejich vlastních bytů. TTC lze použít, abychom našli přiřazení, které je v jádru v libovolném trhu s domy.

[4] Popis TTC:

Krok 1: Každý obchodník ukáže na vlastníka domu, který by nejraději vlastnil, jelikož je počet obchodníků konečný, vytvoří se takto alespoň jedna kružnice (kružnicí zde rozumíme posloupnost n obchodníků, kde každý obchodník a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, ukazuje na a_{i+1} a a_n ukazuje na a_1). V těchto kružnicích provedeme chtěné výměny a TTC pokračuje se zbylými obchodníky.

Krok k : Každý zbylý obchodník ukáže na vlastníka domu, který by nejraději vlastnil, opět se takto utvoří kružnice a opět se provednou výměny a algoritmus pokračuje se zbylými obchodníky. Algoritmus končí, až každý obchodník dostane dům.

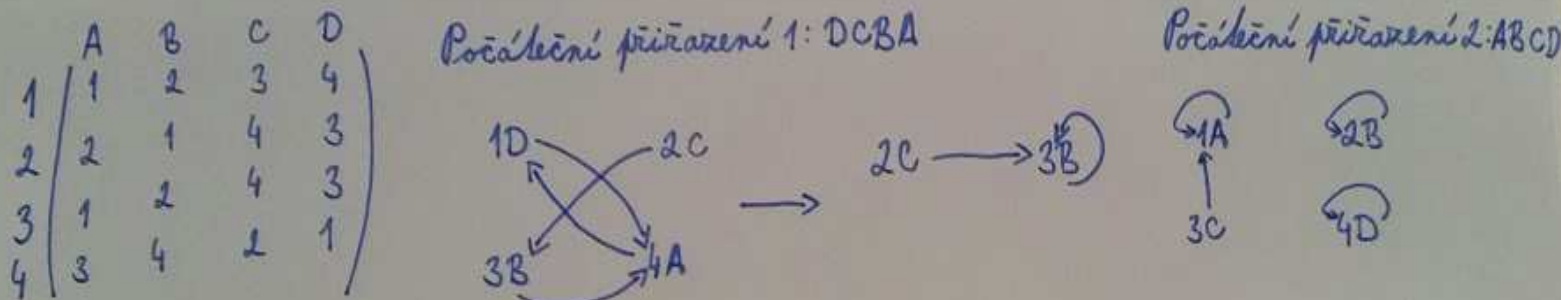
[7] **Věta 3 (Shapley-Scarf 1974):**

Existuje jádrové přiřazení pro libovolný trh s nemovitostmi (domy).

[7] **Důkaz:** Necht' μ je výsledné přiřazení z TTC, předpokládejme, že existuje koalice B , která se odchyluje tím, že užívá jiné přiřazení ν . Uvažujme podmnožinu obchodníků v B , kteří striktně preferují jejich přiřazení ν před μ a necht' a je obchodník, který je v této podmnožině první. Potom

$v(a)$ je vlastněn obchodníkem $b \in B$, který je v TTC algoritmu odstraněn v dřívějším kroku (například v cyklu C_m). Pak b získá dům od $b' \in B \cap C_m$ obojí v i μ , ... $b^k \in B \cap C_m$ získá $v(a)$ při v i μ . Což je spor.

[4] **Příklad 3:** Uvažujme čtyři obchodníky 1,2,3 a 4 a čtyři domy A,B,C a D, preference obchodníků jsou reprezentovány maticí na obrázku níže, dále je na obrázku aplikován algoritmus pro počáteční přiřazení DCBA a ABCD, první přiřazení končí přiřazením ACBD, zatímco druhé ABCD, z toho jde vidět, že záleží na počátečním stavu.



Užití jednostranného a oboustranného párování v praxi

[1] Asi nejvýraznějším příkladem párování je výměna ledvin, v praxi funguje tak (opomineme-li úplatky, obchod s orgány a tak dále), že pacient, který potřebuje novou ledvinu, je v páru s člověkem, který je ochoten mu ledvinu darovat, ale tento pár má například odlišné krevní skupiny. V této situaci lze implementovat obdobu TTC algoritmu s významným rozdílem v tom, že některé pacienty je třeba dát na čekací listinu v naději, že se v budoucnu vyskytne vhodná ledvina. Doktor určí, jaká ledvina je pro pacienta vhodná a v případě, že se utvoří cyklus, výměny jsou podle toho provedeny.

[6] Další užitečné aplikace mohou být v trhu s kvalifikovanou prací, jako například již zmíněné lékařské praxe a nebo přiřazování čerstvě vystudovaných učitelů do státních škol ve Francii od roku 1999, či tréninkový program pro absolventy lékařských škol ve Skotsku rovněž od roku 1999. Poměrně zajímavý mi přijde prakticky motivovaný případ, kdy manželský pár například lékařů hledá práci ve stejné lokaci, je dokázáno, že potom nemusí vždy existovat stabilní párování.

Co se týče skutečného párování mužů a žen, trůfám si nepochybovat o tom, že některé seznamovací agentury mohou používat obdobu algoritmu odložených přijetí. Také si ale myslím, že je třeba brát v potaz, že v teorii her se běžně řeší pouze logické úlohy a docela se zanedbává například morální faktor, dobrou ukázkou toho je asi nejznámější úloha z teorie her, věžňovo dilema.

Toto téma jsem si vybral jednak proto, že když jsme se tento algoritmus učili na programování, tak se většina spolužáků poměrně bavila, i když to do velké míry bylo zásluhou pana doktora Pergla a jeho barvitého popisu aplikace algoritmu v tanečních. Navíc byla za toto téma roku 2012 udělena Nobelova cena v oblasti ekonomie a to Lloydovi S. Shapleymu a Alvinu E. Rothovi.

Rovněž mi přijde velmi zajímavé, že i přes to, že se jedná o poměrně jednoduchou myšlenku na pochopení (nevím, jak obtížné je vymyslet něco nového), má mnoho využití a určitě už pomohla i zachránit životy.

Pozn.: Jednotlivé zdroje se váží k odstavcům, případně k důkazům.

Zdroje:

- [1] http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2012/advanced-economicsciences2012.pdf (Stable allocations and practice of market design)
- [2] http://www.u.arizona.edu/~mwalker/501BReadings/Gale&Shapley_AMM1962.pdf (David Gale, Lloyd Shapley – College Admissions and the Stability of Marriage)
- [3] <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/academic/class/15251-f10/Site/Materials/Lectures/Lecture21/lecture21.pdf> (Dan Gusfield, Robert W. Irwing – The stable marriage problem)
- [4] <http://web.stanford.edu/~niederle/Palgrave%20Matching.Approved.pdf> (Alvin E. Roth, Tayfun Sönmez – Matching)
- [5] <http://pareto.uab.es/jmasso/pdf/ShapleyScarfJME1974.pdf> (Lloyd Shapley, Herbert Scarf – On Cores and Indivisibility)
- [6] <http://www.matching-in-practice.eu/>
- [7] <http://web.stanford.edu/~niederle/HouseAllocation.pdf>
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Core_\(game_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Core_(game_theory))