

# Stabilita řešení

Vít Průša

`prusv@karlin.mff.cuni.cz`

Matematický ústav, Univerzita Karlova

12. května 2016

## 1 Úvod

- Stabilita řešení
- Hagen–Poiseuille
- Rayleigh–Bénard
- Nanotrubky

## 2 Matematická formulace

- Rovnice
- Linearizace v blízkosti stacionárního řešení

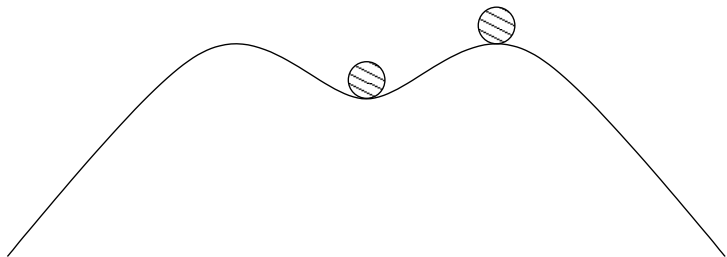
## 3 Výpočty

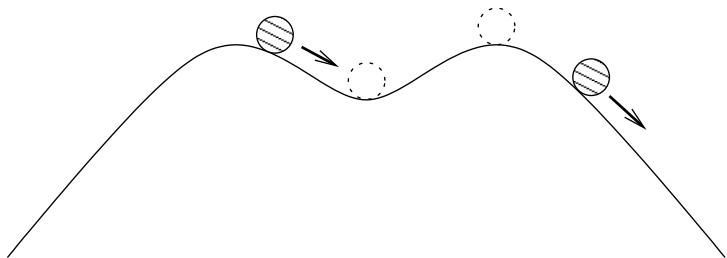
- Orr–Sommerfeld rovnice
- Diskretizace spektrální metodou

## 4 Přechodné růsty (transient growth)

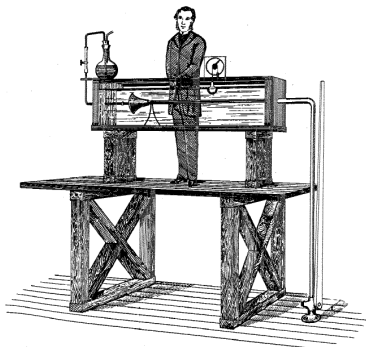
- Nenormální operátory
- Pseudospektrum

## 5 Závěr





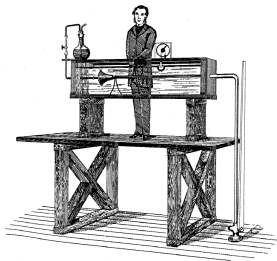
# Reynolds experiment



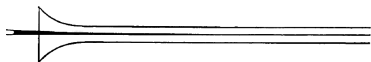
Obrázek: Reynolds experiment.

Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proc. R. Soc. Lond.*, 25:84–99, 1883

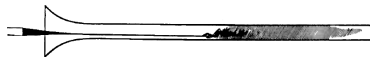
# Reynolds experiment – základní pozorování



(a) Reynolds experiment.



(b) Laminární proudění.



(c) Turbulentní proudění.

[...] the internal motion of water assumes one or other of two broadly distinguishable forms—either the elements of the fluid follow one another along lines of motion which lead in the most direct manner to their destination, or the eddy about in sinous paths the most indirect possible.

# Proč je to zajímavé?

Parabolický rychlostní profil

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta_s R^2}{4\rho\nu} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \mathbf{e}_{\hat{z}}$$

je řešením rovnic pro proudění. Do vzorce lze dosadit pro jakékoliv  $\Delta_s$ . Jak je možné, že parabolický rychlostní profil v experimentu **nevidíme** pro jakékoliv  $\Delta_s$ ?

Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. Über die Bewegung des Wassers in Einen Cylindrischen Röhren. *Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie*, pages 423–442, 1839

Jean Léonard Marie Poiseuille. Sur le mouvement des liquides de nature différente dans les tubes de très petits diamètres. *Annales de Chimie et Physique*, XXI:76–110, 1847

Friction factor:

$$\lambda \approx \frac{\text{pressure drop}}{\text{volumetric flow rate}}$$

Reynolds číslo:

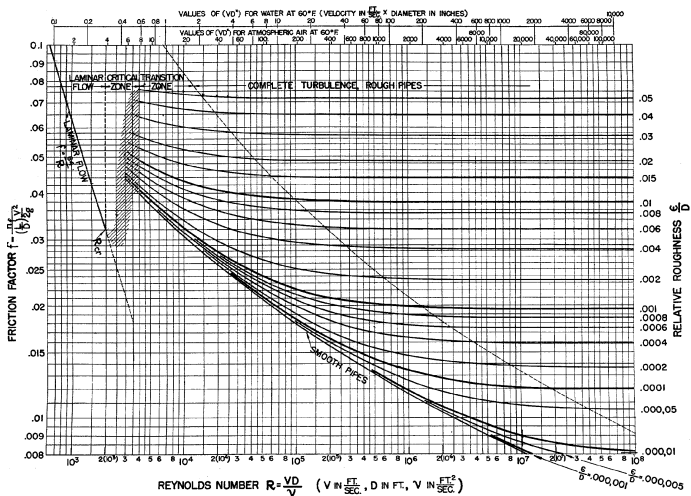
$$\text{Re} = \frac{U_{\max} R}{\nu}$$

Pro **laminární proudění** (parabolický rychlostní profil):

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

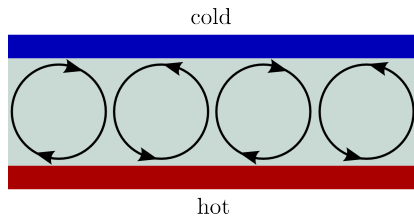
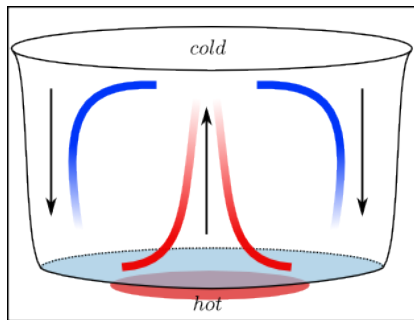


# Moody diagram



Lewis F. Moody. Friction factors for pipe flow. *Transactions of ASME*, 66:671–684, November 1944

# Rayleigh–Bénard I



<http://www.mis.mpg.de/applan/research/rayleigh.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=5ApSJe4FaLI>

# Rayleigh–Bénard III



<http://faraday.physics.uiowa.edu/astro/8B10.40.htm>



FIG. 5. SEM micrographs of cell configuration in barrier layer with different intervals of 100 nm (a), 150 nm (b), and 200 nm (c). Anodization voltage were 40 V (a), 60 V (b), and 80 V (c). Anodization was conducted in 0.3 M oxalic acid of 17 °C for (a) and (b), and 0.04 M oxalic acid of 3 °C for (c). Thickness of the oxide films was approximately 3 μm.

Hideki Masuda, Haruki Yamada, Masahiro Satoh, Hidetaka Asoh, Masashi Nakao, and Toshiaki Tamamura. Highly ordered nanochannel-array architecture in anodic alumina. *Appl. Phys. Lett.*, 71(19):2770–2772, 1997

# Nanotrúbky II

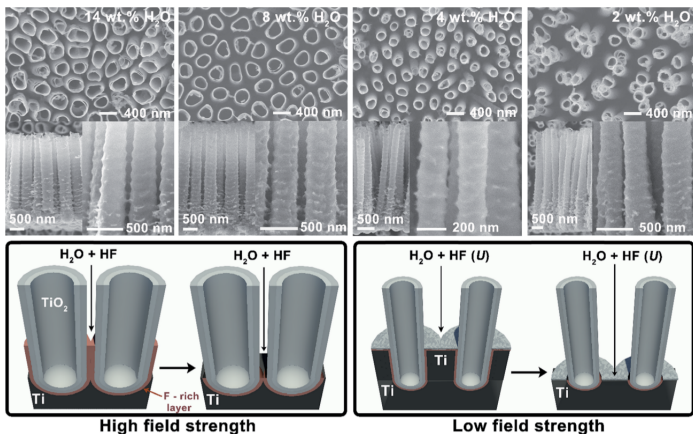


Fig. 2 SEM top and cross-section views for  $\text{TiO}_2$  nanotubes formed at 60 V for 16 h in diethylene glycol electrolyte containing water content from 2–14 wt%. The high-electric-field model assumes the formation of space in-between the tubes by the dissolution of fluoride rich layers, i.e.,  $\text{TiF}_x$ ,  $\text{TiF}_x\text{O}_y$  or similar (bottom left). The low electric-field-model assumes the generation of tubes of smaller diameter when the population of nucleation sites is low; the titanium is present in-between the bottom tube cells (bottom right).

Damian Kowalski, Jeremy Mallet, Jean Michel, and Michael Molinari. Low electric field strength self-organization of anodic  $\text{TiO}_2$  nanotubes in diethylene glycol electrolyte. *J. Mater. Chem. A*, 3:6655–6661, 2015

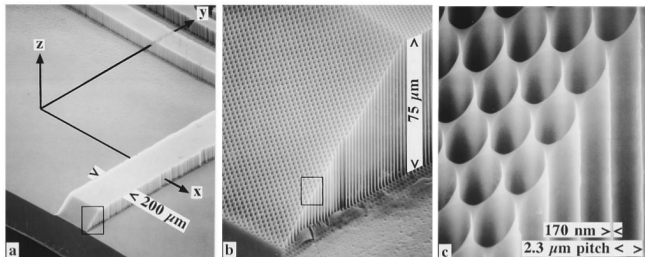
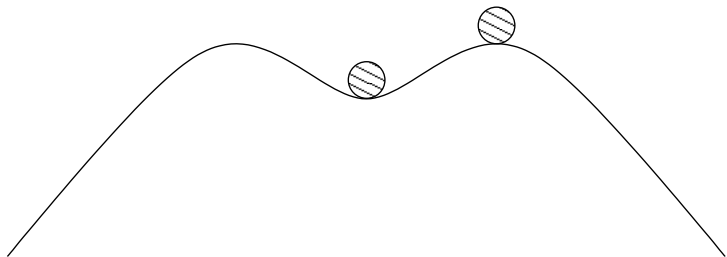
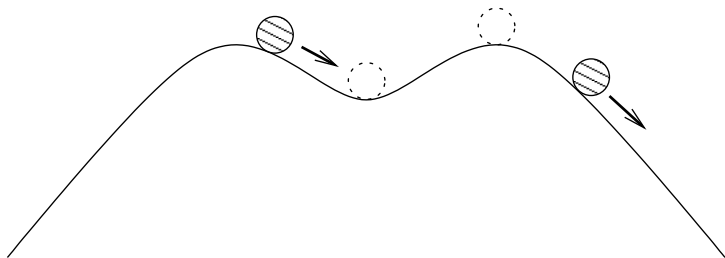


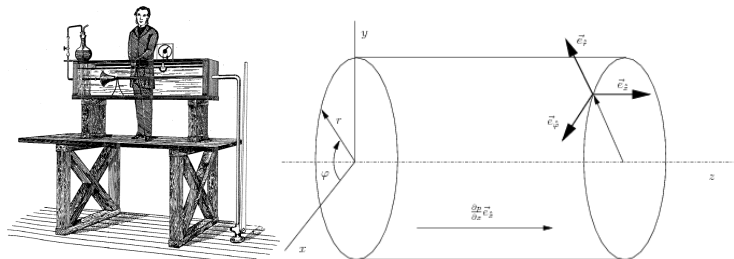
FIG. 1. Scanning electron micrographs of a patterned and micromachined layer of macroporous silicon forming a two-dimensional triangular lattice. (a) The  $200\ \mu\text{m}$  wide and  $75\ \mu\text{m}$  high bars of porous silicon are produced by micromechanically etching the porous layer. (b) A tenfold magnification of the inset in (a) is shown. The edges of the bars were formed by micromechanically etching the layer. (c) A tenfold magnification of the inset in (b) is shown. In order to reveal the microstructure, one side of the bar was polished to show a plane  $45^\circ$  inclined to the sample surface. The lattice constant of the macropore array is  $2.3\ \mu\text{m}$ , the pore diameter  $2.13\ \mu\text{m}$ , and the thinnest parts of the pore walls  $170\ \text{nm}$ .







# Reynolds experiment – matematický popis



Navier–Stokes rovnice, okrajové podmínky  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}$$
$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

Tlakový gradient ve směru  $\mathbf{e}_z$ :  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\Delta_s$

# Reynolds experiment – evoluční rovnice pro poruchu

Rychlostní pole rozložíme na základní rychlostní pole  $\mathbf{V}$  a poruchu  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{v}$$

Evoluční rovnice pro poruchu  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{V}] \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{V} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

Oberbeck–Boussinesq aproximace:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho g (1 - \alpha(T - T_{\text{ref}})) \mathbf{e}_z$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet (\nabla) T \right) = \kappa \Delta T$$

Okrajové podmínky:

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$T|_{\text{hot wall}} = T_2$$

$$T|_{\text{cold wall}} = T_1$$

# Rayleigh–Bénard – evoluční rovnice pro poruchu

Rychlostní a teplotní pole rozložíme na základní rychlostní pole (bez proudění) a základní teplotní pole (lineární teplotní profil):

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{v}$$

$$\vartheta = T + \theta$$

Evoluční rovnice pro poruchu:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{R}\theta \mathbf{e}_z$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{Pr} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \theta \right) = \text{R}v^2 + \Delta \theta$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0$$

Úplný systém:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbb{A} \mathbf{v} + \mathbb{N}(\mathbf{v}), \\ \mathbf{v}|_{t=t_0} &= \mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Linearizace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbb{A} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}|_{t=t_0} &= \mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Struktura rovnic po linearizaci:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbb{A}(\text{Re}, \mathbf{V}) \mathbf{v}$$

Hledáme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) e^{-i\omega t} = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z) e^{-i\Re(\omega)t} e^{\Im(\omega)t}$$

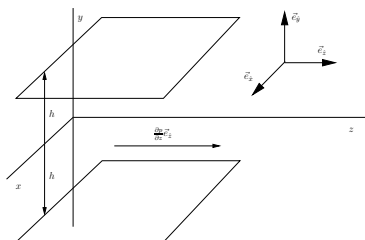
Problém pro vlastní čísla:

$$i\omega \tilde{\mathbf{v}} = \mathbb{A}(\text{Re}, \mathbf{V}) \tilde{\mathbf{v}}$$

Řekneme, že základní rychlostní pole  $\mathbf{V}$  je pro dané Reynolds číslo  $\text{Re}$  stabilní vůči infinitesimálním poruchám, právě když všechna vlastní čísla  $\omega$  operátoru  $\mathbb{A}$  platí

$$\Im(\omega) < 0.$$

# Orr–Sommerfeld rovnice (proudění v rovinném kanálu) I



Hledáme řešení ve tvaru:

$$\mathbf{v}(y, z, t) = \tilde{\mathbf{v}}(y)e^{i(\alpha z - \omega t)}$$



Rovnice pro  $\tilde{v}^{\hat{y}}$ , okrajové podmínky  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ ,  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$ :

$$\left(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}\right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \tilde{v}^{\hat{y}} - i\alpha \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} \tilde{v}^{\hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 \tilde{v}^{\hat{y}}$$

Struktura:

$$-i\omega \mathbb{B} \tilde{v}^{\hat{y}} = \mathbb{C} \tilde{v}^{\hat{y}}$$

Lagrange interpolace:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \quad l_j(x) =_{\text{def}} \frac{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

Zřejmě:

$$p(x_j) = f_j \quad l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

Lloyd N. Trefethen. *Approximation theory and approximation practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2013

# Barycentrická interpolace I

Barycentric weight:

$$w_j =_{\text{def}} \frac{1}{\prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)}$$

Polynom:

$$l(x) =_{\text{def}} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad l_j(x) = l(x) \frac{w_j}{x - x_j}$$

Lagrange interpolace:

$$p(x) = \left( \sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x - x_j} \right) l(x)$$

Zřejmě:

$$1 = \sum_{j=0}^n l_j(x) = \left( \sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j} \right) l(x)$$

Lagrange interpolace (barycentric formula):

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x - x_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x - x_j}}$$

Máme:

$$\left\{ f(x) \Big|_{x=x_j} \right\}_{i=0}^n$$

Chceme:

$$\left\{ \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_j} \right\}_{i=0}^n$$

Umíme:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{x-x_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{w_j}{x-x_j}} \right)$$

Aproximace derivace:

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_j} \approx \frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_j}$$

Derivace interpolačního polynomu:

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \implies \frac{dp}{dx}(x) = \sum_{j=0}^n f_j \frac{dl_j}{dx}(x)$$

Derivace „bázové“ funkce v interpolačních bodech:

$$\left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{x_i - x_j} \quad \left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_j} = - \sum_{i=0, i \neq j}^n \left. \frac{dl_j}{dx} \right|_{x=x_i}$$

Celkem:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^n f_j \frac{w_j}{w_i} \frac{1}{x_i - x_j} = \sum_{j=0}^n D^{(1)}_{ij} f_j$$

Chebyshev body, interval  $[-1, 1]$ ,  $x_i = \cos\left(\frac{(k-1)\pi}{N-1}\right)$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_1} \\ \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_2} \\ \vdots \\ \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_N} \end{bmatrix} = \mathbb{D}^{(1)} \begin{bmatrix} f \Big|_{x=x_1} \\ f \Big|_{x=x_2} \\ \vdots \\ f \Big|_{x=x_N} \end{bmatrix}$$

Polož  $c_1 = c_N = 2$ ,  $c_2 = \dots = c_{N-1} = 1$ :

$$D_{11}^{(1)} = \frac{2(N-1)^2 + 1}{6}$$

$$D_{NN}^{(1)} = -\frac{2(N-1)^2 + 1}{6}$$

$$D_{kj}^{(1)} = \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{(x_k - x_j)}$$

$$D_{jj}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{x_j}{(1 - x_j^2)}$$

# Derivování IV

Pozor na konvenci číslování uzlovýchh bodů.

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{2(-1)^j}{1 - x_j} & \\ \hline & & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i} & \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

J. A. Weideman and S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4):465–519, 2000



Rovnice pro  $\tilde{v}^{\hat{y}}$ , okrajové podmínky  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ ,  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$ :

$$\left(-i\omega + i\alpha V^{\hat{z}}\right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right) \tilde{v}^{\hat{y}} - i\alpha \frac{d^2 V^{\hat{z}}}{dy^2} \tilde{v}^{\hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)^2 \tilde{v}^{\hat{y}}$$

Plán:

- Rovnici vynutíme ve vnitřních interpolačních bodech  $i = 2, \dots, N - 1$ .  
(V krajních bodech intervalu máme okrajovou podmínku  $\tilde{v}^{\hat{y}}|_{y=\pm 1} = 0$ . Podmínka  $\frac{d\tilde{v}^{\hat{y}}}{dy}|_{y=\pm 1} = 0$  se vynucuje lehce komplikovanějším způsobem.)
- Derivace nahradíme maticovým násobením  $\frac{d}{dx} \mapsto \mathbb{D}(1)$ .

J. A. Weideman and S. C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4):465–519, 2000  
Lloyd N. Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*, volume 10 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000

# Přechodný růst I

Rovnice:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix}$$

Operátor:

$$\mathbb{A} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix}$$

# Přechodný růst I

Rovnice:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \eta \end{bmatrix}$$

Operátor:

$$\mathbb{A} =_{\text{def}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\text{Re}} \end{bmatrix}$$

Operátor  $\mathbb{A}$  je nenormální.

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \neq \mathbb{A} \mathbb{A}^T$$

Vlastní čísla:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\text{Re}}$$

Báze v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 1]^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = [0 \ 1]^T$ :

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I})^2 \mathbf{v}_1 = (\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{v}_2 = 0$$

Rovnice:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q} = \mathbb{A}\mathbf{q}$$

Pozorování:

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbb{A}t}\mathbf{q}_0 = e^{\mathbb{A}t}(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = \dots = a_1e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + (a_2 + a_1t)e^{\lambda t}\mathbf{v}_2$$

Nabízí se otázka jak odhadnout počáteční růst řešení. (Aneb pokusit se kvantifikovat nakolik je příslušný operátor nenormální.)

Pseudospektrum operátoru  $A$ ,  $\Lambda_\varepsilon(A)$ ,  $\|\cdot\|$  je 2-norma:

- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (zI - A)^{-1} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \text{existuje } E, \|E\| \leq \varepsilon, \text{ tak, že } z \in \Lambda(A + E) \}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \text{existuje } \mathbf{v}, \|\mathbf{v}\| = 1, \text{ tak, že } \|(A - zI)\mathbf{v}\| \leq \varepsilon \}$
- $\Lambda_\varepsilon(A) =_{\text{def}} \{ z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min} [zI - A] \leq \varepsilon \}$

J. L. M. van Dorsseleer, J. F. B. M. Kraaijevanger, and M. N. Spijker. Linear stability analysis in the numerical solution of initial value problems. In *Acta numerica, 1993*, *Acta Numer.*, pages 199–237. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993

# Spodní odhad na růst

Rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= -i\mathbb{A}\mathbf{q} \\ \mathbf{q}|_{t=0} &= \mathbf{q}_0\end{aligned}$$

Velikost:

$$\sup_{\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{q}(t)|}{|\mathbf{q}_0|} = |e^{-i\mathbb{A}t}|$$

Odhad:

$$\begin{aligned}\sup_{t \geq 0} |e^{-i\mathbb{A}t}| &\geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \sigma_\varepsilon(\mathbb{A}) \\ \sigma_\varepsilon(\mathbb{A}) &=_{\text{def}} \sup_{z \in \Lambda_\varepsilon(\mathbb{A})} \Im(z)\end{aligned}$$

Lloyd N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy, and Tobin A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261(5121):578–584, July 1993

- Důležitou vlastností řešení je jeho stabilita.
- Stabilitu řešení lze zkoumat prostřednictvím spektra linearizovaného operátoru.
- Derivování je také „matice“. (S tímto tvrzením zacházejte opatrně.)
- Spektrální metoda je vhodný nástroj pro diskretizaci.



**MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ**  
Informační stránka oboru Matematické modelování na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze

**ÚVOD** | **NOVINKY** | **LIDE** | **VÝZVUM** | **STUDIUM** | **SEMINÁŘE** | **PUBLIKACE** | **SPOLUPRÁCE** | **KALENDÁŘ** | **KONTAKTY** | **ROŠNĚ**

## Úvod

1. Studijní obor matematické modelování  
2. Co se na matematickém modelování naučíte?  
3. Historie oboru

### Studijní obor matematické modelování

Matematické modelování je **jedinečný a náročný mezinásobový rozmezovací a diskusivní studijní obor** spuštěný na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Studijní kampaň má následující cíle, zaměření:

- **matematickou analýzu** (zvláště parciálních diferenciálních rovnic),
- **numerickou numeriku** (básně numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic, implementace numerických metod),
- **mechaniku kontinua** (mechanika neelastických a reaktivních materiálů, mechanika poruchových látek).

Význam, kterému se na oddělení matematického modelování věnujeme, směřuje do oborů těchto oblastí a ve spolupráci s našimi renomovanými partnerstvími omezuje odborné postupy dosahujeme ve všech těchto oblastech **vynikajících vědeckých výsledků**. (více informací a výzvu najdete zde.) Aktivi pošli na vědeckém výzkumu nám umožňují přelstít studentům nejvyšší možnou trojrozměrnou studijní a rozvoj studentů se vědeckých oblastech matematické vědy (postgraduální studium).

### Co se na matematickém modelování naučíte?

Děkem studiu se naučíte formulovat otázky blížící se přirozeně jen **navrhování nové přístupu pro fyzikální koncepty matematické analýzy**, i když pomocí tak podobné otázky dostáváte odpovědi. Naučíte se **modelovat matematické vlastnosti** specifické matematického modelu **navrhování otázky matematické metody** pro smysluplné přirozené jevy. Naučíte se **rozvíjet nové důležitě a moderní metody řešení problémů**. Na získání analýzy znalostí fyzikálního jevu (dávání modelu, jeho kvalitativní matematických vlastností a numerických metod použitých při jeho počítačové simulaci) získáte postupy věrohodnost výsledků získaných prostřednictvím zvoleného matematického modelu.

Při studiu matematického modelování se seznámíte se základy **teorie parciálních diferenciálních rovnic, funkcionální analýzy, mechaniky a termodynamiky spjitého prostředí, numerické analýzy a implementace numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic**. Jistěně očekáváme zájem studentů o **teorii a její aplikace**, což věnujeme problémy a související a vztahu k řešení digitální práce. Vzhledem k digitální práci se bude digitální práce se bude týkat spíše s tabulami souvisejícími s aplikací mechaniky a termodynamiky spjitého prostředí při řešení nějaké prakticky významné úlohy z oblasti prostředí, zdravotní, matematického výzkumu a podobně. Můžete se však také zabývat **otázkami** konkrétně studijní souvisejícími s teorií parciálních diferenciálních rovnic a teorie a numerického analýzy.

Děkem studiu budete mít možnost **prezentovat se na výzkumných** probíhajících na oddělení matematického modelování a na dalších vědeckých institucích jako je například **Evropské centrum pro matematické modelování**. Budete mít přístup k odborným laboratorům, například k počítačové síťce univerzity. Je třeba, že naši studenti směřují studium na partnerských pracovištích v zahraničí, což jsou například **Mathematical University Marburg (společně s dalšími studijními programy), University of Oxford** nebo **Texas A&M University**.

Studenti matematického modelování byli zařazováni členy **Charles University in Prague Chapter of SIAM**, což je uznávaný studijní

<http://mod.karlin.mff.cuni.cz>