Aplikace matematiky- záverečná práca

Juraj Bodík

28. septembra 2017

Definície

Žena - objekt ohodnotený celým číslom. Každé dve ženy sa dajú porovnať a rozlíšiť, t.j. žiadne dve nemajú rovanké hodnotenie. Žena je objekt veľmi nestabilný, do vzťahu s ňou sa po rozchode dá vrátiť už len veľmi ťažko.
Manželka - žena, s ktorou muž ostane na celý život. Muž sa usiluje mať za manželku ženu s čo najväčším hodnotením.

Prvý Problém

Príbehový

Predstavme si, že o mňa má záujem stovky žien. Ako cieľom každého muža, teda aj mňa, je vybrať si za manželku čo najlepšiu ženu. Ako ale viem, ktorá je tá najlepšia? Až keď so ženou chodím tak zisťujem, aká dobrá manželka by z nej bola v porovnaní s ostatnými. Taktiež, ak sa so ženou rozídem, už sa s ňou znova dať dokopy nedá. Kedy sa teda mám zastaviť a spokojiť sa s tou ktorú mám, aby som s čo najväčšou pravdepodobnosťou získal najlepšiu manželku spomedzi nich? Najlepšou stratégiou je zjavne chodiť s niekoľkými ženami na skúšku, rozísť sa s nimi a potom si vybrať prvú ktorá bude lepšia ako všetky doteraz (keďže nás zaujíma iba nájdenie najlepšej). Kedy je ale optimálny čas, pri ktorom sa mám zastaviť, aby som touto metódou našiel s čo najväčšou pravdepodobnosťou tú najlepšiu ženu? Pozrime sa na to teda očami matematika.

Matematický

Nech N je prirodzené číslo, ω je náhodná permutácia čísel (žien s hodnotením) od 1 po N. Pre aké $K <= N$ platí, že číslo z ω, ktoré je väčšie ako prvých K čísel z ω, a zároveň má túto vlastnosť ako prvé v poradí, má najväčšiu pravdepodobnosť byť číslom N? Aká bude táto pravdepodobnosť?

Riešenie

problém pre malé čísla

Rozoberme si prípad, kedy N=3, teda existujú iba 3 ženy, ktoré o mňa majú záujem, pre hlbšie pochopenie problému. Existuje iba 6 permutácii (3!) v akom poradí s nimi môžem chodiť.
123 132 213 231 312 321

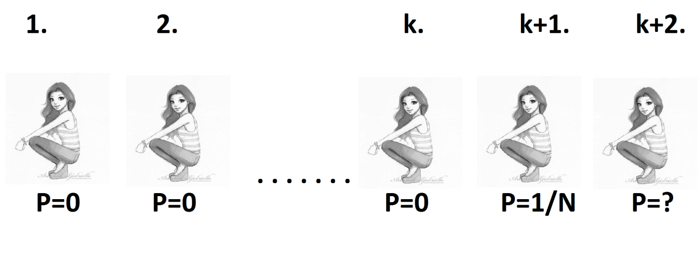
Ak **K=0**, teda vyberiem si vždy prvú, tak pravdepodobnosť výberu najlepšej z nich je $\frac{1}{3}$, keďže spomedzi všetkých permutácii iba 2 začínajú číslom 3.

Ak **K=1**:
pre 123 si vyberiem číslo 2, pretože je lepšie ako prvých K žien, a je prvé v poradí.
pre 132 si vyberiem číslo 3, pretože je lepšie ako prvých K žien, a je prvé v poradí.
pre 213 si vyberiem číslo 3, pretože je lepšie ako prvých K žien, a je také prvé v poradí.
pre 231 si vyberiem číslo 3, pretože je lepšie ako prvých K žien, a je prvé v poradí.
pre 312 si vyberiem číslo 2, pretože je posledné a už sa musím usadiť.
pre 321 si vyberiem číslo 1, pretože je posledné a už sa musím usadiť.
Vidíme teda, že v troch zo šiestich prípadoch som skončil s najlepšou manželkou, teda šanca je $\frac{1}{2}$

Ak **K=2 či 3**, tak mám na výber iba poslednú možnú ženu, lebo iná mi už neostáva, čo je šanca že je najlepšia $\frac{1}{3}$
Preto pre N=3 je hľadané číslo K=1, teda s prvým dievčaťom sa mám rozísť a ostanem s prvým lepším ako bola ona(alebo s poslednou).

Problém pre veľké čísla

Nech teda máme funkciu f(K), ktorá udáva pre číslo **K** pravdepodobnosť získania najlepšej manželky, napríklad $f(0) = f(N-1) = \frac{1}{N}$. Chceme teda zistiť, pre ktoré K je f(K) najväčšie. Spočítajme teda f(K).
$f(K) = P(1) + P(2) + ... + P(n)$ kde P(x) značí pravdepodobnosť výberu najlepšej manželky na mieste x. Nielenže najlepšia manželka bude na mieste x, ale dokonca si práve túto manželku aj vyberiem za ženu.



Keďže sa rozídem s prvými K ženami, tak P(1 až K) bude 0, pretože žiadnu z nich si za manželku nezoberiem za ženu. P(K+1)=$\frac{1}{N}$, pretože šanca že najlepšia manželka bude na mieste K+1 je $\frac{1}{N}$, a ak tam bude tak si ju zoberiem za ženu, lebo je lepšia ako všetky ženy dovtedy.

Pre K+2 to je trochu zložitejšie. Nielenže na tomto mieste musí byť najlepšia manželka, ale aj musí platiť, že sa neusadím so ženou na K+1 mieste. Pravdepodobnosť usadenia sa so ženou na mieste K+1 je $\frac{1}{K+1}$, pretože pravdepodobnosť toho, že z prvých K+1 čísel bude posledné číslo najvačšie je rovnaká, ako že bude prvé z nich najvačšie=druhé z nich najvačšie atd... a šanca že nejaké z nich bude najvačšie je 1, teda pravdepodobnosť sa rovnomerne rozdelí medzi K+1 dievčat a teda bude pravdepodobnosť 1/K+1. Pravdepodobnosť neusadenia sa s ňou bude $1 - \frac{1}{K+1} = \frac{K}{K+1}$, preto P(K+2)=$\frac{1}{N} * \frac{K}{K+1}$.

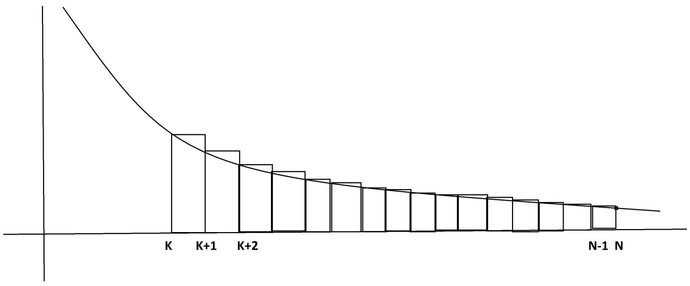
P(K+3)=$\frac{1}{N} * \frac{K}{K+2}$ z rovnakého dôvodu, pretože šanca že si nevyberiem ženu na K+1 a K+2 mieste je $\frac{K}{K+2}$.
Takto pokračuje až po P(N), kde P(N)=$\frac{1}{N} * \frac{K}{N-1}$.

$$f(k) = P(1)+P(2)+...+P(n) = 0+0+...+\frac{1}{N}*1+\frac{1}{N}*\frac{K}{K+1}+\frac{1}{N}*\frac{K}{K+2}+...+\frac{1}{N}*\frac{K}{N-1}$$

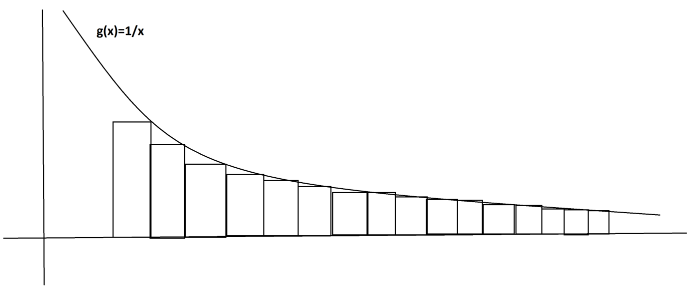
Upravíme na

$$f(k) = \frac{K}{N} * (\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \frac{1}{K+2} + ... + \frac{1}{N-1})$$

Problém sa nám mení iba na analytický, kde ide o zistenie maxima funkcie(t.j. pre ktoré K je to najviac). Na to použijeme trik, a to zoberieme funkciu $g(x) = \frac{1}{x}$. Ako vieme, obsah pod grafom funkcie zistíme určitým integrálom od K po N funkcie $\frac{1}{x}$, čo sa vlastne rovná $log(N) - log(K) = log\frac{N}{K}$.



Ako vidíme aj na obrázku, reálny obsah obdĺžnikov je trochu väčší ako obsah pod grafom funkcie, väčší o najviac $\frac{1}{K} - \frac{1}{N}$. Ak si zoberieme zase takýto prípad ako na ďalšom obrázku, tak tu majú obdĺžniky zase menší obsah ako je obsah pod grafom, no a rozdiel obdĺžnikov v prvom obrázku a tu je práve $\frac{1}{K} - \frac{1}{N}$, čo ale je pre veľké čísla veľmi málo(už aj pre malé čísla je to málo).



Spolu nám teda vychádza, že

$$f(K) = \frac{K}{N} * log(\frac{N}{K})$$

maximum takejto funkcie je už triviálny príklad. Maximum hľadanej funkcie nastáva vtedy keď jej derivácia sa rovná 0, pre tento prípad nám vyjde deriácia $\frac{log(\frac{N}{K})-1}{N}$. Z týchto poznatkov nám vycházdza, že ak $\frac{log(\frac{N}{K})-1}{N} = 0$, musí platiť $log(\frac{N}{K}) = 1$, inak napísané:

$$K = \frac{N}{e}$$

Záver 1

Ak mám možnosť spoznať a chodiť s N ženami, tak najlepšia stratégia je s prvými $\frac{N}{e}$ chodiť, spoznať a rovno sa s nimi rozísť, a potom si zobrať za manželku prvú ženu, ktorá bola lepšia ako všetky, s ktorými som sa za celý život stretol. Keďže funkcia f(x) označovala pravdepodobnosť nájdenia najlepšej manželky, a vieme aké je K, t.j.

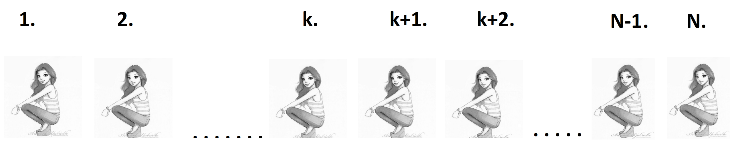
$$f(k) = \frac{K}{N} * (\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + \frac{1}{K+2} + ... + \frac{1}{N-1}) \approx \frac{1}{e}$$

vyplynie nám, že menej ako 37 percent ľudí si nájde ideálnu osobu a teda je veľmi veľká pravdepodobnosť toho, že pre každého ženatého muža je niekde omnoho vhodnejšia manželka. Ako posledná informácia na záver, zo správy štatistického úradu SR z roku 2006 vyplýva, že 37 percent manželstiev končilo rozvodom. Kto vie prečo.

Druhý problém

V prvom probléme sme zistili, ako čo najčastejšie získať najlepšiu manželku, no veľa krát sa stalo, že sme skončili s inou. Akou inou? Bude oveľa horšia? Nebude vedieť ani variť ani prať? Na akú manželku sa teda pravdepodobne možem tešiť?
Matematicky by sa to dalo sformulovať ako zistenie strednej hodnoty.

Riešenie 2



S=N*P(N) + (N-1)*P(N-1) + ... kde P(x) značí pravdepodobnosť výberu ženy s x-tým hodnotením v poradí za manželku. Vypočítali sme už, že P(N)=1/e.

P(N-1)

Druhú najlepšiu ženu si vyberiem iba v dvoch možných prípadoch- ak najlepšia žena bude až po nej v poradí (označme túto pravdepodobnosť PM(1)), alebo ak bude najlepšia medzi prvými K-ženami a táto naša druhá najlepšia bude až úplne posledná(označme PM(2)). Na vypočítanie tejto druhej možnosti vynásobíme pravdepodobnosť toho, že bude najlepšia žena medzi prvými K ženami ($\frac{K}{N}$), s pravdepodonosťou toho, že posledná bude druhá najlepšia($\frac{1}{N-1}$), spolu $PM(2) = \frac{K}{N} * \frac{1}{N-1}$

Pre prvú možnosť si to rozdeľme na súčet PM(1)=R(K+1) + R(K+2) + ... + R(N-1) kde R(x) označuje pravdepodobnosť vybrania si druhej najlepšej manželky na x-tom mieste. Začneme s R(K+1), teda pravdepodobnosť toho, že druhú najlepšiu manželku si zoberieme za ženu na K+1 mieste. Na to musí splňať to, aby najlepšia manželka bola až po nej($\frac{N-(K+1)}{N}$), a aby naša druhá najlepšia bola práve na tom K+1 mieste($\frac{1}{N-1}$) a tiež aby sme dovtedy žiadnu nevybrali($\frac{K}{K}$) čo je samozrejme 1. Spolu

$$R(K+1) = \frac{N-(K+1)}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{K}$$

Pokračujme pre R(K+2), teda pravdepodobnosť toho, že druhú najlepšiu manželku si zoberieme za ženu na K+2 mieste. Na to musí splňať to, aby najlepšia manželka bola až po nej($\frac{N-(K+2)}{N}$), a aby naša druhá najlepšia bola práve na tom K+2 mieste($\frac{1}{N-1}$) a tiež aby sme dovtedy žiadnu nevybrali($\frac{K}{K+1}$, pravdepodobnosť usadenia sa so ženou na mieste K+1 je $\frac{1}{K+1}$, ako sme zistili na strane číslo 2, a toto je teda jeho doplnok) . Spolu

$$R(K+2) = \frac{N-(K+2)}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{K+1}$$

Ak takto pokračujeme, spolu budeme mať

$$R(K+x) = \frac{N-(K+x)}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{K+x}$$

Konečne tak vieme vypočítať PM(1)

$$PM(1) = R(K+1) + R(K+2) + ... =$$

$$= \frac{N-(K+1)}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{K} + \frac{N-(K+2)}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{K+1} + ... \frac{1}{N} * \frac{1}{N-1} * \frac{K}{N-2}$$

kde po úprave pravej strany, pridaní PM(2) a vznásobení (N-1) dostaneme (kvôli prehľadnosti je pár medzivýpočtov preskočených)

$$(N-1)*P(N-1) = \frac{K}{N}*(N*(\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}+...+\frac{1}{N-2})-(N-K-1+\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}+...))$$

a keďže suma $\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} + ...$ je rovná log($\frac{N}{K}$), K=$\frac{N}{e}$ a log(e)=1, tak za výsledok dostávame

$$(N-1) * P(N-1) = \frac{N}{e^2}$$

Rovnakým postupom dostávame aj ďalšie hodnoty a získavame tak

$$s = N * P(N) + (N-1) * P(N-1) + ... = \frac{N}{e} + \frac{N}{e^2} + ...$$

čo pre veľké N je to približne **N*0,804.**

Záver 2

Pravdepodobne teda ostanem s nadpriemernou ženou, dúfajúc, že aspoň bude vedieť variť. No musím si vždy pamätať, že je nadpriemerná spomedzi všetkých mojich možných žien(dokonca v najlepšej pätine). Pri úlohe získania najlepšej manželky však hrá veľkú úlohu počiatočný počet žien. Úlohu zväčšenia tohoto počtu je ohromne komplexný problém, ktorý sa snažilo vyriešiť mnoho veľkých matematikov no neuspelo. Mnohí prišli na čiastočné riešenie, a to ako tento počet znížiť. Prišli totiž na to, že ak iba jediná žena bude mať o nich záujem, s istotou si vyberú tú najlepšiu spomedzi nej.

Zdroje

.

1- http://www.karlin.mff.cuni.cz/ pawlas/vyuka.html

2-https://www.youtube.com/watch?v=ZWib5olGbQ0

3- http://www.science4all.org/article/online-optimization/

4-$http : //ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Marriages_and_births_in_Slovakia/sk$