1 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Nechť $\mathbb{Z}_N$ je množina N-tých odmocnin jedničky v oboru komplexních čísel, tedy

$$\mathbb{Z}_N = \{1, e^{2\pi i/N}, e^{2\cdot 2\pi i/N} \ldots, e^{(N-1)\cdot 2\pi i/N}\}.$$

Pak $\mathbb{Z}_N$ s obvyklým násobením komplexních čísel je Abelovská (tedy komutativní) grupa. Dále je $\mathbb{Z}_N$ isomorfní s množinou $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ vybavenou sumací modulo N. A dále je isomorfní s $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, množině tříd ekvivalence celých čísel definovaných pomocí zbytku při dělení N.

Definujeme vektory $e_l \in \mathbb{C}^N$ s komponentami $e_l(k), k = 0, \ldots, N-1$

$$e_l(k) = e^{2\pi i l k/N} \quad \text{pro } l = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ a } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Stejně tak je možné se na dívat na e_l jako na funkce $e_l : \{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{C}$. Konečně označíme V vektorový prostor komplexních funkcí na $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ se skalárním součinem

$$\langle F, G\rangle_V = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\overline{G(k)},$$

a normou

$$\|F\|_V^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2.$$

Jednoduchý výpočet dává

Lemma 1.1. *Pro $0 \le l, m \le N-1$ platí*

$$\langle e_l, e_m\rangle_V = N \cdot \delta_{m,l} = \begin{cases} N & \text{pro } l = m, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} .$$

Vektory $e_l^* = e_l/\sqrt{N}, l = 0, 1, \ldots, N-1$, tvoří tedy ortonormální bázi V.

Pro každé $F \in V$ tedy dostaneme

$$F = \sum_{n=0}^{N-1} \langle F, e_n^*\rangle_V e_n^*,$$

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\langle F, e_n^*\rangle_V|^2.$$

Pro $n \in \mathbb{Z}$ definujeme n-tý Fourierův koeficient F jako

$$a_n = \hat{F}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{-2\pi i k n/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle F, e_n^*\rangle.$$

Věta 1.2. *Pro $F \in V$ máme*

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle F, e_n^*\rangle_V e_n^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{N} a_n e_n^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2\pi i n k/N},$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle F, e_n^*\rangle_V|^2 = \frac{1}{N} \|F\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2.$$

Naivní způsob výpočtu $\hat{F}(0), \ldots, \hat{F}(N-1)$ pro dané $F(0), \ldots, F(N-1)$ a $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ je

$$a_k^N(F) := \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} F(r)\omega_N^{kr}.$$

Zahrnuje tedy $N-2$ multiplikací vedoucí k $\omega_N^2, \ldots, \omega_N^{N-1}$ a každé a_k^N vyžaduje $N+1$ multiplikací a $N-1$ součtů. Celkem tedy potřebujeme $2N^2 + N - 2 \leq 2N^2 + N$ operací. .

Věta 1.3. (Fast Fourier Transform) *Pro dané $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ s $N = 2^n$ potřebujeme nejvýše*

$$4 \cdot 2^n \cdot n = 4N \log_2(N) = O(N \log N)$$

operací k výpočtu všech Fourierových koeficientů F.

Důkaz. Nechť $\#(M)$ je minimální počet operací potřebných k výpočtu všech Fourierových koeficientů na $\mathbb{Z}_M$. Tvrdíme, že platí

$$\#(2M) \leq 2\#(M) + 8M$$

pokud $\omega_{2M} = e^{-2\pi i/(2M)}$ je dáno.
Použitím tohoto tvrzení lze již větu snadno dokázat indukcí. Pro $N = 2^1 = 2$ potřebujeme jistě méně než 8 operací, abychom vypočetli

$$a_0^N(F) = 1/2(F(1) + F(-1)), \quad a_1^N(F) = 1/2(F(1) - F(-1)).$$

Pokud věta platí pro $N = 2^{n-1}$, pak dostaneme

$$\#(2N) \leq 2 \cdot 4 \cdot 2^{n-1}(n-1) + 8 \cdot 2^{n-1} = 8n2^{n-1} = 4n2^n.$$

Důkaz tvrzení:
Potřebujeme nejvýše $2M$ operací, abychom získali $\omega_{2M}^2, \ldots, \omega_{2M}^{2M-1}$. Dále, pro F definovanou na $\mathbb{Z}_{2M}$, uvažujeme F_0 a F_1 definované na $\mathbb{Z}_M$, které jsou zadány pomocí $F_0(r) = F(2r)$ a $F_1(r) = F(2r+1)$. Předpokládáme dále, že jsme schonpni jejich vypočíst jejich Fourierovy koeficienty (na $\mathbb{Z}_M$) v $\#(M)$ operacích.

Tvrzení pak plyne z následujícího výpočtu $(0 \leq k \leq 2M-1)$[1]

$$\begin{aligned}
a_k^{2M}(F) &= \frac{1}{2M} \sum_{r=0}^{2M-1} F(r)\omega_{2M}^{kr} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} F(2l)\omega_{2M}^{k(2l)} + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F(2m+1)\omega_{2M}^{k(2m+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} F_0(l)\omega_M^{kl} + \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F_1(m)\omega_M^{km}\omega_{2M}^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_k^M(F_0) + a_k^M(F_1)\omega_{2M}^k\right).
\end{aligned}$$

□

[1] Všimněte si, že $a_k^M(F_0) = a_{k-M}^M(F_0)$ pro $k \geq M$.

Cvičení:

1. Jiná forma téhož definuje *Diskrétní Fourierovu Transformaci (DFT)* $\mathcal{F}x$ signálu $x \in \mathbb{C}^N$ jako
$$\mathcal{F}x := \mathbb{F}_N x,$$
kde $\mathbb{F}_N$ je N-dimenzionální *Fourierova matice*
$$\mathbb{F}_N = \left(e^{-2\pi ik\ell/N}\right)_{k,\ell=0,\dots,N-1}.$$

2. Rozmyslete si, že jsme již vlastně dokázali, že $\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \mathbb{F}_N$ je unitární matice, a že tedy
$$\mathbb{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\left(e^{2\pi ik\ell/N}\right)_{k,\ell=0,\dots,N-1}.$$

3. *Cyklická konvoluce* $x * y \in \mathbb{C}^N$ signálů $x, y \in \mathbb{C}^N$ nad $\mathbb{Z}_N$ je definována jako
$$(x * y)_k := \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{(k-\ell) \bmod N}\, y_\ell, \qquad k \in \mathbb{Z}_N = \{0, \dots, N-1\}.$$

4. Dokažte, že platí
$$\mathcal{F}(x * y) = (\mathcal{F}x) \cdot (\mathcal{F}y),$$
kde "$\cdot$" je bodový součin dvou vektorů.

5. Odvoďte vzorce pro DFT shiftu a modulace daného vektoru, tedy pro
$$\mathcal{F}(\{x_n e^{2\pi i \frac{nm}{N}}\}) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}(\{x_{n-m}\}).$$

6. Dokažte, že
$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{F}_N\right)^4 = Id,$$
a že tedy vlastní čísla matice $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{F}_N$ leží v množině $\{\pm 1, \pm i\}$.

7. Cooley–Tukey FFT algorithm: Zkuste si rozmyslet, že popsaný algoritmus pro FFT lze použít i pro libovolnou faktorizaci $N = N_1 N_2$, kde není nutné, aby N_1 nebo N_2 bylo rovno dvěma.