

# Ukázky aplikací matematiky

Jan Janoušek

19.9.2019

## 1 Úvod

V této práci se budu zabývat dopravními toky (traffic flow). Zaměřil jsem se na oblast ulic Legerova, Sokolská, Ječná, Žitná, Rumunská, Londýnská a Náměstí Míru.

Tuto oblast jsem si vybral proto, že jsem se v její blízkosti v prvním ročníku studia matematiky na MFF pohyboval každý den. Také se v této oblasti pohybují velmi pravidelně ať už za volantem osobního automobilu, jako chodec, nebo jako pasažér v MHD. Zároveň mne velmi zajímá doprava a dopravní logistika, proto jsem si vybral toto téma práce.

Dalším důvodem k výběru této oblasti bylo, že v tomto místě je naprostá většina silnic pouze jednosměrných, což se velmi hodí pro výpočet intenzity dopravy, neboť u obousměrných silnic nemůžeme vypočítat přesnou intenzitu dopravy, ale pouze rozdíl mezi počtem vozidel jedoucích jedním směrem a druhým směrem.

Data využitá v mé práci jsou reálná data naměřená v průběhu 24 hodin společností *Technická správa komunikací hl. m. Prahy, a.s.*

Hlavním cílem práce je z vybraného rozsáhlého systému křižovatek, kde jsou známa jen některá data, vypočítat intenzitu dopravy ve zbylých úsecích, případně navrhnout nějakou stavební úpravu, která by zjednodušila provoz v takto hustě využívaném místě.

Protože měření probíhalo pouze na velkých silnicích, je možné, že výpočty nebudou přesně numericky vycházet, neboť nějaká vozidla mohou odbočit, nebo se připojit uprostřed měřeného úseku.

V takovém případě by soustavy lineárních rovnic neměly řešení. Proto bych při nich použil metodu *Nejmenších čtverců*, abych našel alespoň nejpřesnější přibližné řešení. Hlavními matematickými vědami, které budu využívat, jsou lineární algebra, teorie grafů a teorie dopravních toků.

## 2 Matematický aparát

### 2.1 Teorie grafů

#### 2.1.1 Graf

Graf  $G$  je uspořádaná dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je nějaká neprázdná množina a  $E$  je množina dvoubodových podmnožin množiny  $V$ . Prvky  $V$  nazýváme vrcholy grafu  $G$  a prvky  $E$  hranami tohoto grafu.[1]

#### 2.1.2 Orientovaný graf

Orientovaný graf  $G$  je dvojice  $(V, E)$ , kde  $E$  je podmnožina kartézského součinu  $V \times V$ . Prvky  $E$  nazýváme šipky a hranu z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  značíme  $(u, v)$ . [1]

#### 2.1.3 Hranově ohodnocený graf

Nechť  $G = (V, E)$  je graf. Potom uspořádanou trojici  $(V, E, \omega)$  nazýváme hranově ohodnoceným grafem, kde  $\omega$  je funkce, která každé hraně přiřadí nezáporné reálné číslo, tedy  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . [1]

#### 2.1.4 Matice sousednosti grafu

Nechť  $G = (V, E, \omega)$  je hranově ohodnocený graf s  $n$  vrcholy označenými v libovolném pořadí  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Potom maticí sousednosti grafu  $G$  nazveme čtvercovou maticí  $A_G$  typu  $n \times n$ , kde  $a_{ij} = \omega(v_i, v_j)$ , pokud  $(v_i, v_j) \in E$  a  $a_{ij} = 0$  pokud  $(v_i, v_j) \notin E$ . [1]

#### 2.1.5 Matice incidence grafu

Nechť  $G = (V, E, \omega)$  je hranově ohodnocený orientovaný graf s  $n$  vrcholy označenými v libovolném pořadí  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  a  $m$  hranami taktéž označenými v libovolném pořadí  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ . Potom maticí incidence grafu  $G$  nazveme obdélníkovou maticí  $D_G$  typu  $n \times m$ , kde  $d_{ij} = \omega(e_j)$ , pokud hrana  $e_j$  ve vrcholu  $v_i$  končí,  $d_{ij} = -\omega(e_j)$ , pokud hrana  $e_j$  v tomto vrcholu začíná a  $d_{ij} = 0$ , pokud  $e_j \notin E$ . [1]

## 2.2 Lineární algebra

### 2.2.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice o  $n$  neznámých s reálnými koeficienty je rovnice  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , kde všechny koeficienty  $a_1, a_2, \dots, a_n$  a číslo  $b$  jsou daná reálná čísla a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou neznámé.[2]

### 2.2.2 Soustava lineárních rovnic

Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých je soustava

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

s reálnými koeficienty  $a_{ij}$ , reálnými pravými stranami  $b_i$  a neznámými  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Reálná čísla  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou řešením dané soustavy, pokud splňují zároveň všechny rovnice.[2]

### 2.2.3 Aritmetický vektor

Aritmetickým vektorem s  $n$  složkami rozumíme uspořádanou  $n$ -tici čísel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

[2]

### 2.2.4 Matice

Maticí typu  $m \times n$  rozumíme obdélníkové schéma reálných čísel s  $m$  řádky a  $n$  sloupci.[2]

## 2.2.5 Matice soustavy, rozšířená matice soustavy a aritmetický vektor

Maticí soustavy

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

rozumíme matici koeficientů u neznámých:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran je aritmetický vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Rozšířenou maticí soustavy rozumíme matici typu  $m \times (n + 1)$

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

[2]

## 2.2.6 Řádkově odstupňovaný tvar matice

Matice  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje celé číslo  $r \in \{0, 1, \dots, m\}$  takové, že řádky  $r + 1, \dots, m$  jsou nulové, řádky  $1, \dots, r$  jsou nenulové, a platí  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ , kde  $k_i$  je index sloupce, ve kterém je první nenulové číslo v  $i$ -tém řádku.[2]

### 2.2.7 Gaussova eliminace

Gaussova eliminace převede každou matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  do odstupňovaného tvaru. *Důkaz spolu s popisem eliminace je uveden ve zdroji.*[2]

### 2.2.8 Redukovaný řádkově odstupňovaný tvar matice

Matice je v redukovaném odstupňovaném tvaru, pokud je v řádkově odstupňovaném tvaru a každý bázový sloupec má jedinou nenulovou složku rovnou 1.[2]

### 2.2.9 Gaussova-Jordanova eliminace

Gaussova-Jordanova eliminace převede každou matici do redukovaného odstupňovaného tvaru. *Popis eliminace i její důkaz je uveden ve zdroji.*[2]

### 2.2.10 Eukleidovská norma

Eukleidovská norma nebo také eukleidovská délka vektoru  $u \in \mathbb{R}^n$  je číslo  $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ . [2]

### 2.2.11 Hermitovsky sdružená matice

Hermitovsky sdružená matice k matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  je matice  $A^* = (b_{ji})$  typu  $n \times m$ , kde  $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$  pro libovolné indexy  $i \in 1, 2, \dots, m$  a  $j \in 1, 2, \dots, n$ . [2]

### 2.2.12 Metoda nejmenších čtverců

Nechť  $Ax = b$  je soustava lineárních rovnic s reálnými koeficienty. Každý vektor  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , který minimalizuje eukleidovskou normu  $\|b - A\hat{x}\|$ , se nazývá přibližné řešení (nebo aproximace řešení) soustavy  $Ax = b$  metodou nejmenších čtverců.

Je-li  $A$  matice typu  $m \times n$  nad  $\mathbb{R}$  a  $b \in \mathbb{R}^m$ , pak množina všech přibližných řešení soustavy  $Ax = b$  metodou nejmenších čtverců je rovna množině všech (přesných) řešení soustavy  $A^*A\hat{x} = A^*b$  *Důkaz opět ve skriptech.*[2]

## 3 Dopravní tok

### 3.1 Metodologie měření a výpočtu dopravního toku

Hlavními třemi ukazateli, které popisují dopravu jsou *dopravní tok*, který se značí  $q$  a je uváděn v počtech vozidel za jednotku času, *rychlost*, která se značí  $v$  a její jednotkou je počet ujeté vzdálenosti a jednotku času a *koncentrace*, značená  $k$ , která má jednotku počet vozidel dělený vzdáleností.

Protože v dobách brzkého měření byly jedinými pomůckami měřičů dopravy stopky a ruční počítadla, bylo měření dopravního toku a rozestupu mezi vozidly jediným ukazatelem v dopravní teorii. Rychlost byla v této době měřena u jednotlivých vozidel a to pomocí dvou čar, kde měřitelé věděli pevně danou délku a pouze stopovali čas, za jaký dané auto úsek silnice projede.

Existují dva základní typy měření dopravy *měření v bodě* a *úsekové měření*. [3]

### 3.2 Měření v bodě

Nejjednodušší typ měření dopravy. Při měření dopravy v bodě je důležité mít dlouhodobá pozorování, proto se všechny výsledky uvádějí jako průměry. Také výsledky změřené v mé práci jsou výsledkem měření v bodě.

#### 3.2.1 Dopravní tok

Dopravní tok je definován jednoduchým vzorcem  $q = N/T$ , kde  $T$  je čas a  $N$  celkový počet vozidel. Nebo ještě také vzorcem:

$$q = \frac{N}{T} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N h_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i} = \frac{1}{\bar{h}}$$

Kde  $h_i$  jsou jednotlivé rozestupy mezi vozidly (uváděné v čase) a  $\bar{h}$  je průměrný rozestup mezi vozidly. Někdy je vhodné zavést také okamžitý dopravní tok pro všechna vozidla. Tedy  $q_i = 1/h_i$ . Potom celkový dopravní tok vyjádříme jako harmonický průměr jednotlivých dopravních toků:

$$q = \frac{1}{\bar{h}} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{q_i}}$$

[4]

### 3.2.2 Rychlost

Průměrná rychlost je velmi důležitým ukazatelem jak v určitém bodě, tak na určité komunikaci. Existují dvě základní průměrné rychlosti *bodová rychlost* a *úseková rychlost*. Bodová průměrná rychlost se vypočítává jako aritmetický průměr naměřených rychlostí, tedy  $v_{bod} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N}$ . Úseková průměrná rychlost je vypočítána takto:  $v_{usek} = \frac{D}{\bar{t}}$ , kde  $D$  je celková délka zkoumaného úseku a  $\bar{t}$  čas, který jedno vozidlo průměrně stráví na tomto úseku. Platí tedy

$$v_{usek} = \frac{D}{\bar{t}} = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{D}{v_i}} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_i}}$$

Jde tedy o harmonický průměr rychlostí v daném bodě.[3]

### 3.2.3 Koncentrace

Ačkoliv výpočet koncentrace vozidel nás svádí spíše k měření úsekovému, existuje jednoduchý vzoreček:  $k = \frac{q}{v_{usek}}$ . [3]

## 3.3 Úsekové měření

Někdy také zvané *měření podle fotografií*, protože hlavní způsob, jak získávat výsledko tohoto měření je porovnávat rozdíly mezi dvěma fotografiemi pořízenými krátce po sobě.[3]

### 3.3.1 Koncentrace

Koncentraci lze vypočítat jednoduše:  $k = \frac{N}{l}$ , kde  $N$  je celkový počet vozidel a  $l$  je délka úseku. Celkovou koncentraci vozidel můžeme získat také z jednotlivých koncentrací ( $k_i = \frac{1}{s_i} = \frac{1}{h_i v_i}$ ), kde  $s_i$  je vzdálenost mezi předním nárazníkem  $i$ -tého vozidla a předním nárazníkem vozidla před ním.  $v_i$  je rychlost  $i$ -tého vozidla a  $h_i$  časový rozestup  $i$ -tého vozidla. Pro celkovou koncentraci tedy platí:

$$k = \frac{N}{\sum_{i=1}^N s_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i}}$$

Celková koncentrace je tedy vypočítána jako harmonický průměr jednotlivých koncentrací.[3]

### 3.3.2 Rychlost

Rychlost jednoho vozidla je vypočítána jednoduchým vzorečkem:  $v_i = \frac{s_i}{\Delta t}$ , kde  $s_i$  je vzdálenost uražena tímto vozidlem a  $\Delta t$  je čas, po jaký trvalo urazit tuto vzdálenost. Celkovou rychlost  $v_{usek}$  vypočítáme takto:

$$v_{usek} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{N \Delta t}$$

[3]

### 3.3.3 Dopravní tok

Dopravní tok poté vypočítáme jednoduše, neboť z již vypočítané koncentrace a rychlosti jej získáme jednoduchým vynásobením:  $q = k \cdot v_{usek}$ . [3]

## 3.4 Teorie dopravního toku

### 3.4.1 Axiom zachování hmoty v křižovatce

Počet vozidel vjíždějících do křižovatky je roven počtu vozidel vyjíždějících z křižovatky. [4]

### 3.4.2 Axiom zachování hmoty v systému

Počet vozidel vjíždějících do našeho systému křižovatek je roven počtu vozidel vyjíždějících z našeho systému křižovatek. [4]

### 3.4.3 Věta o průjezdu všech vozidel

Všechna vozidla, které do našeho systému vjedou z něj musí někde vyjet a žádné vozidlo, které do systému nevjelo z něj nemůže vyjet.

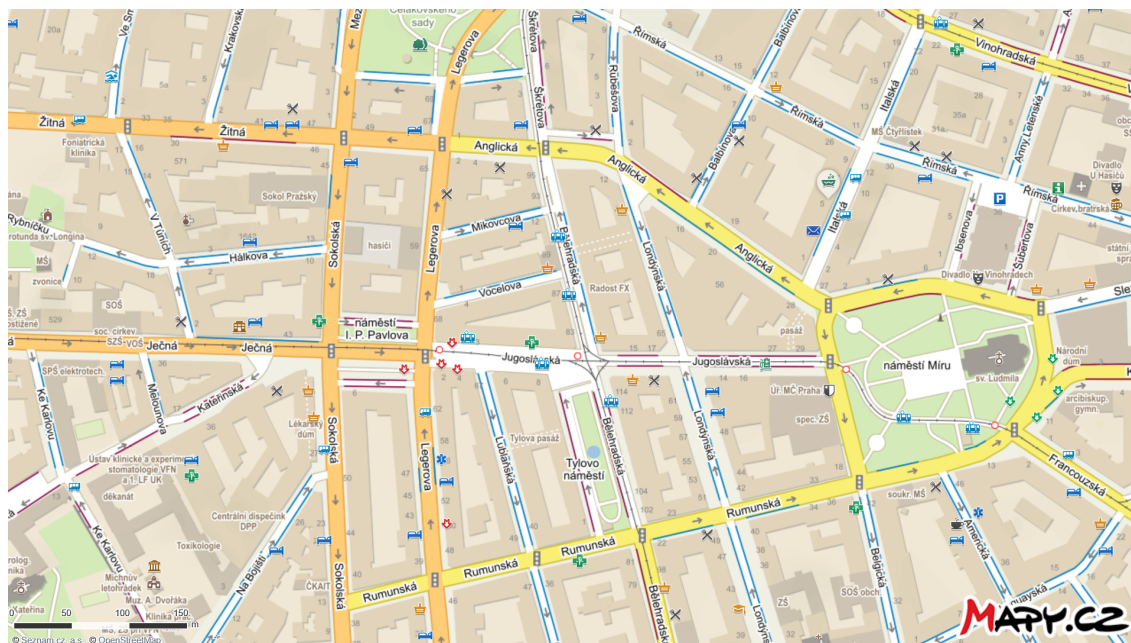
*Důkaz: Sporem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedno vozidlo, které v našem systému zůstane (zaparkuje), nebo které bylo zaparkováno, ale ze systému vyjede, potom porušuje axiom zachování hmoty v systému křižovatek, tudíž věta platí.*



## 4 Popis reálné situace

Centrem Prahy, konkrétně ulicemi Žitná, Ječná, Sokolovská a Legerova projedou denně statisíce aut. Z reálně naměřených dat na některých komunikacích se pokusím vypočítat celkovou hustotu dopravy na všech ostatních.

Vybrané území (okolo stanice MHD I.P. Pavlova, která je shodou okolností také nejrušnější zastávkou pražské hromadné dopravy) je vyobrazeno na obrázku 1.



Obrázek 1: Mapa (bez bodů)

Na obrázku 2 je v téže mapě zachyceno 26 bodů, které jsou klíčové v mojí práci, neboť mezi těmito body byla intenzita dopravy měřena, nebo bude dopočítána.

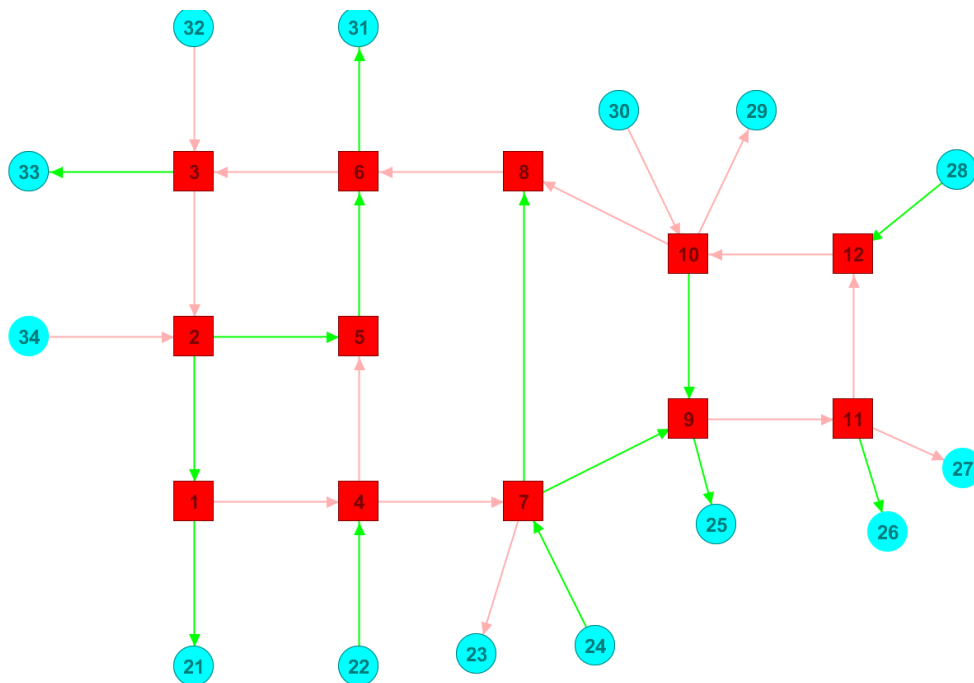
Body označené 21-34 leží mimo můj zkoumaný systém křižovatek a jsou vyobrazeny jen proto, aby byly zaznamenány a intenzity dopravy dovnitř a vně mého systému. Obsahují tedy vždy jen jednu hranu, která jde buďto do tohoto vrcholu, nebo z něj. Body označené 1-12 jsou jádrem mého systému. Obsahují vždy více než jednu hranu. Logicky tedy musí obsahovat alespoň jednu hranu která v tomto vrcholu začíná a alespoň jednu, která zde končí, protože podle 3.4.1 se musí počet vozidel vjíždějících dovnitř a vyjíždějících ven rovnat (samozřejmě za předpokladu, že žádná žádná z hran nemá nulovou váhu).



Obrázek 2: Mapa (s vyznačenými body)

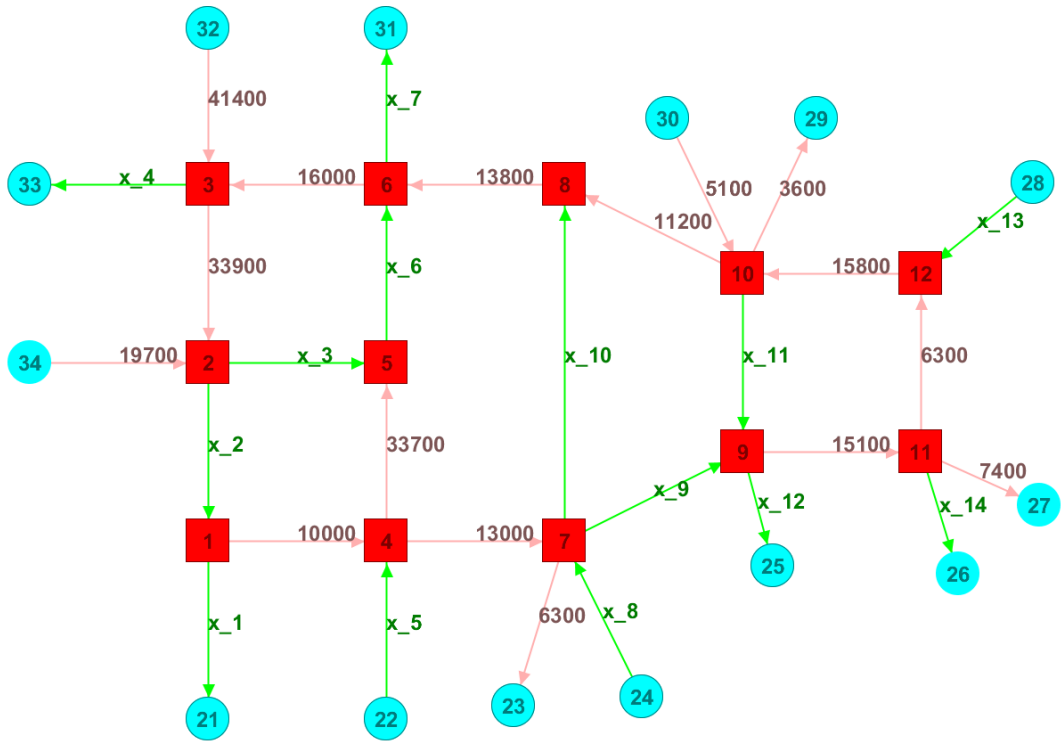
## 5 Matematický model reálné situace

Z výše vyobrazené mapy jsem vytvořil zjednodušený matematický model pomocí grafu (obrázek 3), kde vrcholy označené čísly (číslování je pouze systematické, pořadí vrcholů nic neznamena) ve čtvercích jsou vrcholy uvnitř mnou zkoumaného systému. Vrcholy v kruzích jsou ony vrcholy 21-34, které evidují intenzitu dopravy dovnitř a vně.



Obrázek 3: Graf (bez vyznačených vah)

Na dalším obrázku (obrázek 4) již máme doplněné i intenzity dopravy. Intenzity dopravy jsou uváděny v počtech vozidel za 24 hodin a v grafu jsou uvedeny jako ohodnocení dané hrany. Nenaměřené hodnoty jsou uvedeny jako neznámé  $x_i$ , kde  $i$  je index neznámé. Pořadí indexů opět nemá žádný skrytý význam.



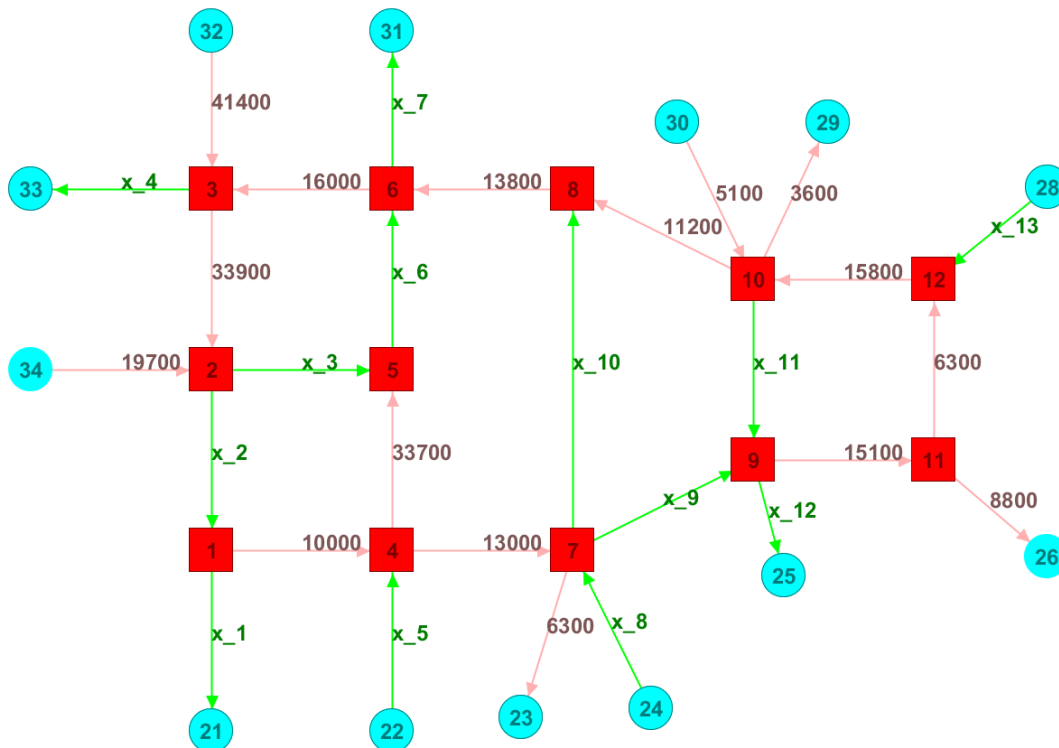
Obrázek 4: Graf (s vyznačenými vahami)

## 6 Řešení matematického problému

### 6.1 Vyšetření křižovatky Náměstí míru-Francouzská-Korunní

Jako úplně první bych rád vyřešil neznámou  $x_{14}$ , protože z vrcholu 11 jsou dvě hrany, které vystupují z mého systému, konkrétně jde o ulice Francouzská a Korunní, přičemž hodnotu hrany  $11 \rightarrow 27$ -Korunní ulice známe (7400), ale hodnotu hrany  $11 \rightarrow 26$ -Francouzské ulice neznáme ( $x_{14}$ ). A pro pozdější výpočet by bylo složité zapisovat řešení s takovouto rovnicí.

Využijeme zde faktu 3.4.1 a získáváme jednoduchou lineární rovnici:  $15100 = 7400 + 6300 + x_{14}$ , z níž získáváme  $x_{14} = 1400$ . Můžeme tedy nyní pro zjednodušení grafu uvažovat, že z vrcholu 11 vystupuje pouze jedna hrana a to hrana do vrcholu 26, která má váhu 8800. Zjednodušený graf je vyobrazen na obrázku 5.



Obrázek 5: Graf (upravený, bez vrcholu 27)

## 6.2 Tabulka dat z grafu

*Pozn. Pro vrcholy počítáme tak, že hrana jdoucí do tohoto vrcholu je kladně ohodnocená (neboť přináší vozidla tomuto vrcholu) a hrana jdoucí z něj ven je záporně ohodnocená, protože mu vozidla odebírá.*

Nyní již tedy můžeme z upraveného grafu získat tabulku dat, kde jednotlivé řádky značí počet vozidel vjíždějících do tohoto vrcholu (v případě záporného znaménka vyjíždějících) a ve sl  $I$  v tabulce značí počet vozidel proudících z vnějšku do našeho systému,  $O$  značí počet vozidel proudících z našeho systému mimo.

0	I	O	1	2	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	0	0	0	-19 700	-41 400	$-x_5$	0	0	$-x_8$	0	0	-5 100	0	$-x_{13}$
O	0	0	$x_1$	0	$x_4$	0	0	$x_7$	6 300	0	$x_{12}$	3 600	8 800	0
1	0	$-x_1$	0	$x_2$	0	-10 000	0	0	0	0	0	0	0	0
2	19 700	0	$-x_2$	0	33 900	0	$-x_3$	0	0	0	0	0	0	0
3	41 400	$-x_4$	0	-33 900	0	0	0	16 000	0	0	0	0	0	0
4	$x_5$	0	10 000	0	0	0	-33 700	0	-13 000	0	0	0	0	0
5	0	0	0	$x_3$	0	33 700	0	$-x_6$	0	0	0	0	0	0
6	0	$-x_7$	0	0	-16 000	0	$x_6$	0	0	13 800	0	0	0	0
7	$x_8$	-6 300	0	0	0	13 000	0	0	0	$-x_{10}$	$-x_9$	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-13 800	$x_{10}$	0	0	11 200	0	0
9	0	$-x_{12}$	0	0	0	0	0	0	$x_9$	0	0	$x_{11}$	-15 100	0
10	5 100	-3 600	0	0	0	0	0	0	0	-11 200	$-x_{11}$	0	0	15 800
11	0	-8 800	0	0	0	0	0	0	0	0	15 100	0	0	-6 300
12	$x_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-15 800	6 300	0

### 6.3 Soustava rovnic

Z tabulky jsme sestavili soustavu rovnic, ze které nyní získáme řešení našeho problému.

$$-x_1 + x_2 = 10000 \quad (1)$$

$$-x_2 - x_3 = -53600 \quad (2)$$

$$-x_4 = -23500 \quad (3)$$

$$x_5 = 36700 \quad (4)$$

$$x_3 - x_6 = -33700 \quad (5)$$

$$x_6 - x_7 = 2200 \quad (6)$$

$$x_8 - x_9 - x_{10} = -6700 \quad (7)$$

$$x_{10} = 2600 \quad (8)$$

$$x_9 + x_{11} - x_{12} = 15100 \quad (9)$$

$$-x_{11} = -6100 \quad (10)$$

$$0 = 0 \quad (11)$$

$$x_{13} = 9500 \quad (12)$$

$$x_1 + x_4 - x_5 + x_7 - x_8 + x_{12} - x_{13} = 47500 \quad (13)$$

*Pozn. Čísla uvedená u jednotlivých rovnic vyjadřují, jakého vrcholu se daná rovnice týká. Rovnice č.13 potom vyjadřuje vztah celkové dopravy do našeho systému a ven z něj viz 3.4.2 A pokud si tuto soustavu rovnic zapíšeme jako matici, získáváme tuto matici.*

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -53600 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36700 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -6700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 15100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 47500 \end{array} \right)$$



## 6.4 Výpočet řešení

### 6.4.1 Řešení našeho systému

Nyní již stačí vyřešit tuto soustavu rovnic pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace. Protože soustava rovnic je řešitelná (neboť platí *Věta o průjezdu všech vozidel*) získáváme řešení přímým výpočtem bez nutnosti používat metodu nejmenších čtverců. Řešením této matice je aritmetický vektor:

$$\begin{pmatrix} 75100-x_7 \\ 85100-x_7 \\ -31500+x_7 \\ 23500 \\ 36700 \\ 2200+x_7 \\ x_7 \\ 4900+x_{12} \\ 9000+x_{12} \\ 2600 \\ 6100 \\ x_{12} \\ 9500 \end{pmatrix}$$

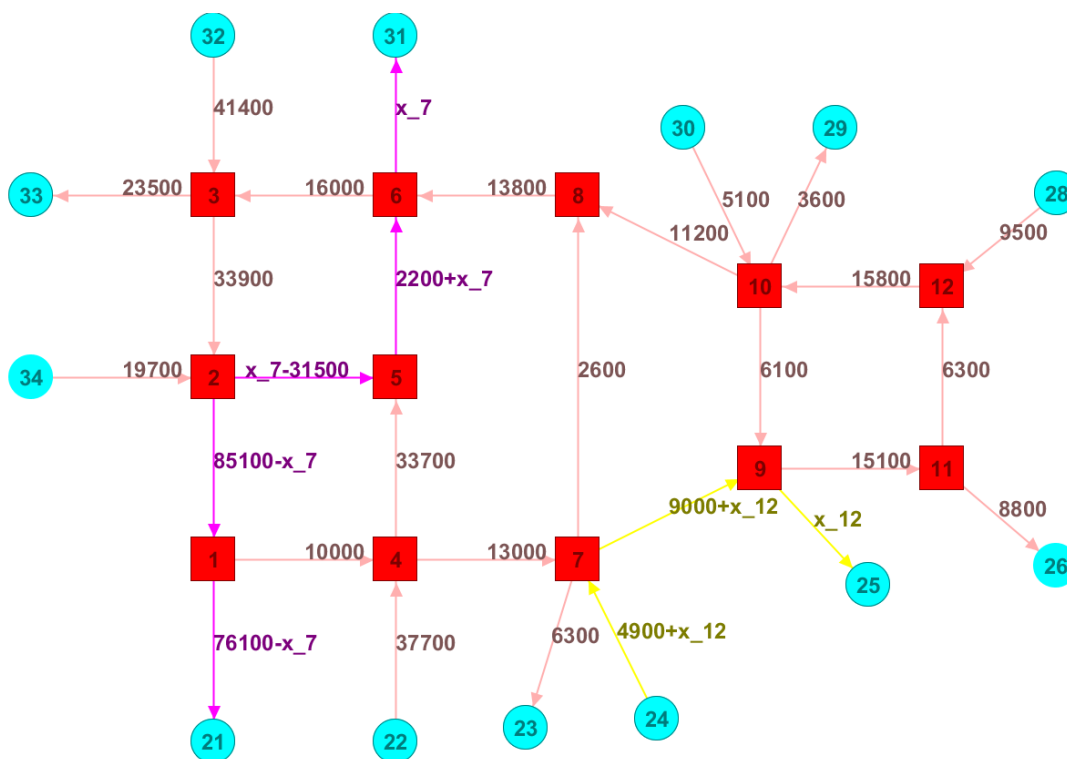
Vidíme, že naše řešení obsahuje dvě volné proměnné  $x_7$  a  $x_{12}$ . Rozsah volné proměnné  $x_7$  je  $[31500; 75100]$ . Rozsah proměnné  $x_{12}$  je  $[0; \infty)$ , protože všechny hrany musí mít nezáporné ohodnocení. Tedy máme:

Hrana 1  $\rightarrow$  4 :  $75100 - x_7 \geq 0$  proto  $x_7 \leq 75100$ .

Hrana 2  $\rightarrow$  5 :  $-31500 + x_7 \geq 0$  proto  $x_7 \geq 31500$ .

Hrana 9  $\rightarrow$  25 :  $x_{12} \geq 0$

Navíc uvažujeme pouze přirozená čísla, neboť při počítání vozidel má smysl uvažovat jen o přirozených číslech (rozšířených o nulu). Na obrázku 6 je upravený graf s již dopočítanými hodnotami.



Obrázek 6: Graf konečná podoba s dvěma proměnnými

Vidíme, že proměnná  $x_7$  se začíná projevovat ve vrcholu číslo 2. Z tohoto vrcholu vychází dvě hrany, která proměnná  $x_7$  ovlivňuje, s tím, že směrem k vrcholu 5 je kladně ohodnocená a směrem k vrcholu 1 je záporně ohodnocená. Můžeme tedy říci, že v tomto místě existuje jistý prostor pro vůli řidičů. Pakliže ze Sokolské ulice odbočí doleva do ulice I. P. Pavlova, nebo pokračují z Ječné ulice rovně po I. P. Pavlova a potom se nuceně vydají opět doleva (z této křižovatky se jinak dostat nedá) Legerovou ulicí, přidávají se k celkovému počtu vozidel proudících z vrcholu 5 do vrcholu 6 a z něj dále na sever do vrcholu 31.

Jestliže vozidla pokračují rovně po Sokolské ulici, nebo z Ječné ulice odbočují doprava na Sokolskou, přidávají se k celkovému počtu vozidel proudících na jih Sokolskou ulicí a navyšují tedy váhu na hranách  $2 \rightarrow 1$  a  $1 \rightarrow 21$ .

Proměnná  $x_{12}$  nám určuje pouze to, kolik vozidel přijede po Londýnské ulici, odbočí doprava na Rumunskou a hned zase vyjede z našeho zkoumaného systému Belgickou ulicí.

### 6.4.2 Alternativní otočení ulice I.P. Pavlova

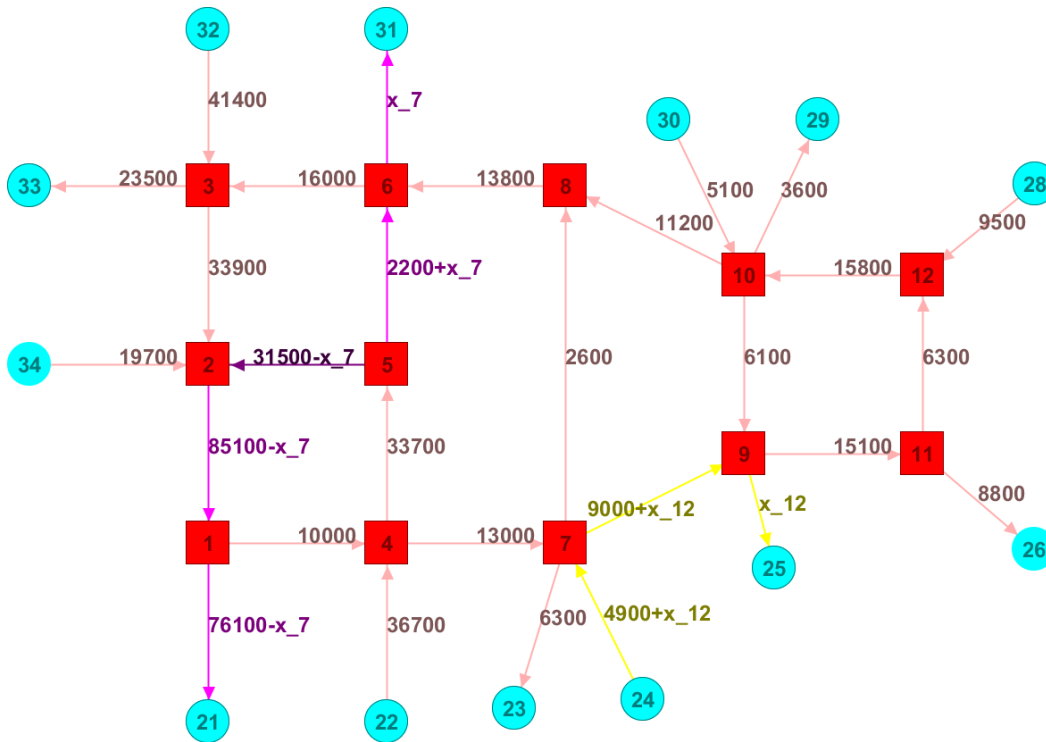
V případě, že bychom otočili směr dopravy na náměstí I. P. Pavlova mezi ulicemi Legerova a Sokolská (tedy hrana by vedla  $5 \rightarrow 2$ , pak bychom získali upravenou soustavu rovnic:

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -53600 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36700 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -6700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 15100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 47500 \end{array} \right)$$

jejímž výsledkem je aritmetický vektor:

$$\left( \begin{array}{c} 75100-x_7 \\ 85100-x_7 \\ 31500-x_7 \\ 23500 \\ 36700 \\ 2200+x_7 \\ x_7 \\ 4900+x_{12} \\ 9000+x_{12} \\ 2600 \\ 6100 \\ x_{12} \\ 9500 \end{array} \right)$$

Tomu odpovídá následující graf (obrázek 7)



Obrázek 7: Graf s otočenou jednosměrkou

Rozsah volné proměnné  $x_7$  by nyní byl  $[0, 31500]$ . Pokud se nad tímto grafem zamyslíme, dospějeme k závěru, že otočením této ulice bychom nejspíš značně přetížili dopravu ve směru na jih a z velmi hustě využívané tepny na sever bychom udělali málo využívanou cestu. Protože v této oblasti plné jednosměrek se obvykle střídají směry jednosměrek v rovnoběžných ulicích spojujících dvě na ně kolmé ulice, mohlo by změnou nastat to, že najednou tři po sobě jdoucí ulice vedou stejným směrem, což je opět proti logické výstavbě a proti zájmu stavitelů, cestujících i obyvatel. Bylo by to ale alespoň teoreticky možné.

### 6.4.3 Alternativní otočení Legerovy ulice

Pokud bychom otočili hranu  $x_7$ , tak aby vedla  $31 \rightarrow 6$ , pak bychom dostali tuto matici

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -53600 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36700 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -6700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 15100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 47500 \end{array} \right)$$

a jako výsledek soustavy rovnic takovýto aritmetický vektor:

$$\left( \begin{array}{c} 75100+x_7 \\ 85100+x_7 \\ -31500-x_7 \\ 23500 \\ 36700 \\ 2200+x_7 \\ x_7 \\ 4900+x_{12} \\ 9000+x_{12} \\ 2600 \\ 6100 \\ x_{12} \\ 9500 \end{array} \right)$$

kdy jsme za proměnnou  $x_3$  dostali výsledek  $-31500 - x_7$  a protože  $x_7$  musí být kladná hodnota, celkově tento výraz bude záporný a tudíž tato upravená soustava rovnic nemá řešení, protože po ulici nemůže proudit záporný počet vozidel.

## 7 Závěr

Vytyčený cíl, tedy dopočítat hodnoty mezi ostatními vrcholy, byl splněn. Vypočítal jsem hodnoty mezi uzly, kde nebyla dostupná data. Dostal jsem dvě volné proměnné, které mi ukazují jakousi volnost v rozhodování řidičů.

Nejvyužívanější komunikace nejde přímo určit, protože závisí na parametru volné proměnné  $x_7$ . Pokud by však  $x_7$  nabývala hodnoty 41450, pak by nejrušnějšími ulicemi byly zároveň hrany  $5 \rightarrow 6$  (Legerova ulice od křižovakty s I.P. Pavlova po křižovatku s Anglickou) a  $2 \rightarrow 1$  (Sokolská ulice od křižovakty s Ječnou ulicí po křižovatku s Rumunskou), pokud by  $x_7$  bylo menší než 41450, potom by nejrušnější hranou byla hrana  $2 \rightarrow 1$  (Sokolská) a naopak pokud by  $x_7$  bylo větší než 41450, pak by nejrušnější hranou byla hrana  $5 \rightarrow 6$  (Legerova).

Volná proměnná  $x_{12}$  mi určuje, kolik vozidel se vlastně jen mihne v mém systému, tedy kolik jich přijede po Londýnské, odbočí na Rumunskou a opustí můj systém Belgickou ulicí.

Celkově můžeme říci, že tato oblast je stavebně postavena dobře, neboť nedochází k nějakému přelévání dopravy přes několikero ulic, kterému by bylo možné zamezit nějakou stavební úpravou.

Některé neznámé jednosměrky je teoreticky možno otočit, nepřineslo by to však moc užitku, protože bychom přehlcovali již tak dost vytížené silnice. Konkrétně jde o hrany očíslované:  $x_1$ ,  $x_3$  a  $x_{12}$ . Jiné ulice není ani teoreticky možno otočit, protože by po nich (nebo v důsledku jejich otočení po okolních ulicích) poté musel proudit záporný počet vozidel.

## Reference

- [1] MATOUŠEK, Jiří a Jaroslav NEŠETŘIL. Kapitoly z diskrétní matematiky. Vyd. 2., opr., (V nakl. Karolinum 1.). Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0084-6.  
Dostupné z [http://www.ms.mff.cuni.cz/~yaghoboa/dokumenty\\_prvak/matousek-nesetril-kapitoly.pdf](http://www.ms.mff.cuni.cz/~yaghoboa/dokumenty_prvak/matousek-nesetril-kapitoly.pdf)
- [2] BARTO, Libor a Jiří TŮMA. Lineární algebra (skriptum).  
Dostupné z [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta\\_la6.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la6.pdf)
- [3] GERLOUGH, Daniel L. a Matthew J. HUBER. Traffic flow theory: a monograph. Washington: Transportation Research Board, National Research Council, 1975. Special report (National Research Council (U.S.). Transportation Research Board), 165. ISBN 0309024595.  
Dostupné z: <http://onlinepubs.trb.org/Onlinepubs/sr/sr165/165.pdf>
- [4] NICHOLSON, W. Keith. Linear algebra with applications. 3rd ed. Boston: PWS Pub. Co., c1995. ISBN 0534936660.

Zdroje obrázků 1 a 2 [mappy.cz](http://mappy.cz). Obrázky 3-7 vypracovány v softwaru *Graphtea*.