Ukázky aplikací matematiky
Objekty geometrického modelování

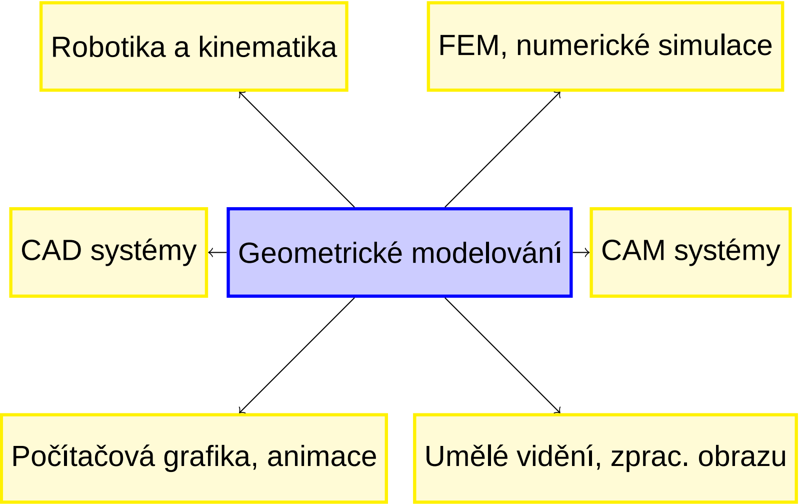
Zbyněk Šír

Matematický ústav UK
Matematicko-fyzikální fakulta

16. března 2017

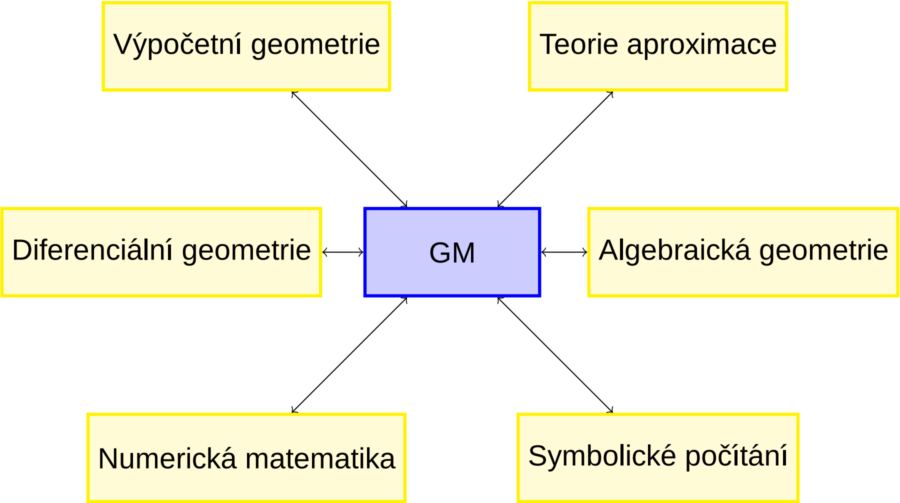
Co je geometrické modelování?

- moderní teoretická geometrická disciplína
- studuje objekty a reprezentace vhodné pro geometrické aplikace



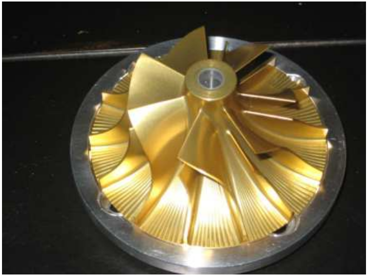
Teoretické a metodologické souvislosti

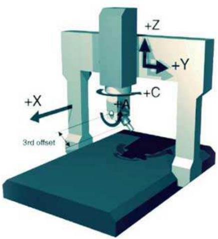
Vzájemné ovlivňování:

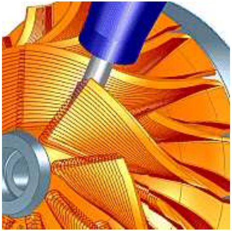


Správné pochopení geometrie je zásadní

Obrábění rotoru turbodmychadla:



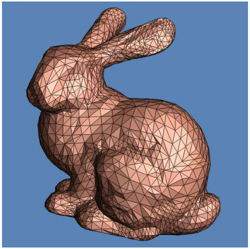




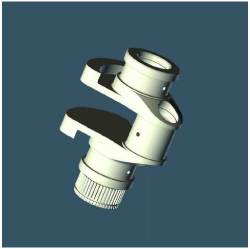
- pouze rozvinutelné plochy je možno obrábět válcovou frézou, jinak nutně dochází k podřezu
- chyby jsou často marně odstraňovány pokusy o vyšší kvalitu a přesnost frézování
- návrh správného nástroje je obtížný geometrický problém

Dva hlavní typy geometrických reprezentací v GM

1. diskrétní či po částech lineární objekty, mnohostěny, mračna bodů
   - především v počítačové grafice, animacích, FEM ...
   - paradigmatem je trojúhelníkový mesh
   - metody výpočetní geometrie, diskrétní matematiky, diskrétní diferenciální geometrie ...

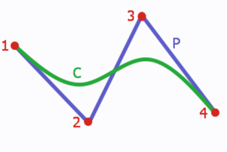


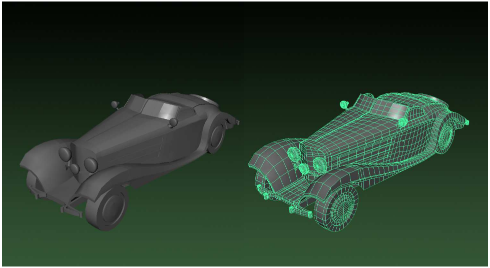
2. spojité a hladké reprezentace, C^n parametrizace, implicitní plochy
   - využívá se zejména v CAD, CAM, robotice ...
   - paradigmatem je po částech polynomiální či racionální parametrizace
   - užívá metod diferenciální a algebraické geometrie, teorie aproximace ...



Ráj racionálních parametrizací

- Bézierovy křivky mají mnoho dobrých vlastností (vysoká stabilita, intuitivní ovládání tvaru, efektivní vykreslení, výpočet polohy, omezení konvexním obalem, omezená variace)





- racionální po částech = NURBS (non-uniform rational B-splines)
- v CAD, CAM systémech jsou reprezentovány velmi efektivně
- neracionální reprezentace tradičně podporovány nejsou

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.
- Vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tečný vektor* k parametrizované křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Co je to křivka?

- Nechť $I = (\alpha, \beta)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}$. *Parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^3$ je dostatečně hladké zobrazení (na I existují spojité derivace, které potřebujeme) $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$.
- Obraz parametrizované křivky je stejný pro nekonečně mnoho křivek (parametrizací).
- Budeme studovat zejména vlastnosti nezávislé na parametrizaci.
- Křivka je *regulární*, pokud $\forall t \in I : \mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, 0)$.
- Vektor $\mathbf{c}'(t) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tečný vektor* k parametrizované křivce $\mathbf{c}$ v bodě $\mathbf{c}(t)$.
- Délku křivky vypočítáme jako $\int_\alpha^\beta |\mathbf{c}'(t)| dt$ a nezávisí na parametrizace.

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

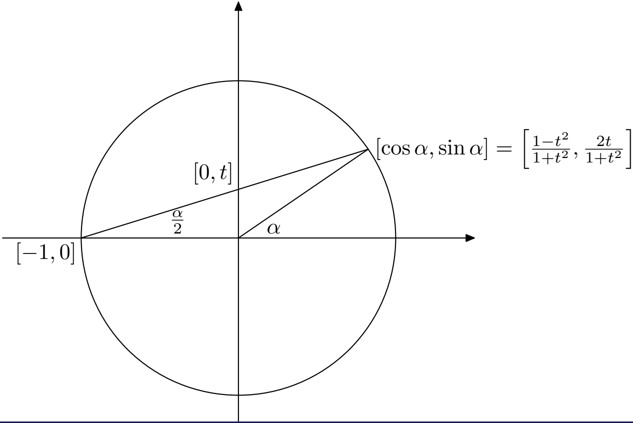
Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereograficckou projekcí.

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$

Jak parametrizovat kružnici (oblouk)?

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$ se parametrizuje jako $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$.
Ale lze i racionálně stereograficky projekcí.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{kde } t = \tan(\alpha/2).$$



Polynomiální rovinné křivky

- Rovinná polynomiální křivka je zobrazení z omezeného intervalu $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ tvaru $\mathbf{c}(t) = [p_x(t), p_y(t)]$, kde p_x, p_y jsou polynomy v t.
- Stupeň $\mathbf{c}(t)$ definujeme jako maximum stupňů p_x, p_y.
- Křivky stupně 0 jsou body, stupně 1 úsečky a stupně 2 části parabol.
- Křivky stupně 3 jsou pro aplikace nejdůležitější:
  - Mohou mít inflexe.
  - Mohou to být pravé 3d křivky s nenulovou torzí(při zobrazení do $\mathbb{R}^3$).
  - Mohou řešit tzv. Hermitovskou C^1 interpolaci.

Báze kubických polynomů

- Monomiální báze $\mathcal{M} = (1, t, t^2, t^3)$, v té je vlastně křivka $[-8 + 54t - 108t^2 + 81t^3, -11 + 90t - 216t^2 + 162t^3]$ vyjádřena.
- Můžeme ovšem upravit jako $[-8, -11] + [54, 90]t + [108, -216]t^2 + [81, 162]t^3$.
- Jakou jinou bázi můžeme zvolit, aby se něco zjednodušilo nebo zlepšilo?
- Bernsteinova báze (vítěz historického boje), Fergusonova interepolační báze.

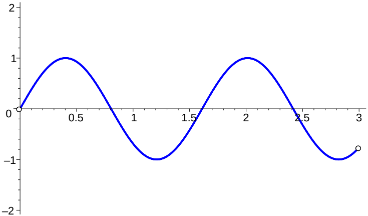
Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$$

$$\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

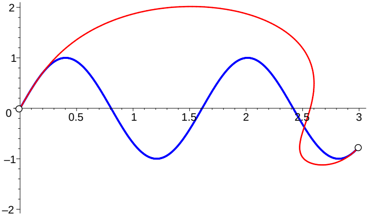


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

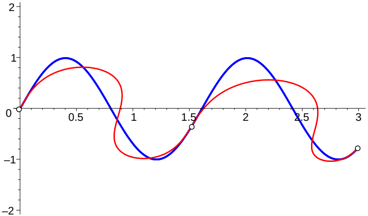


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\} \qquad\qquad \mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.

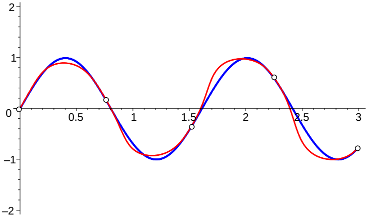


Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$  $\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



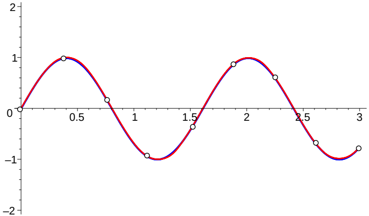
Hermiteovská interpolace

Jedna z možných základních konstrukčních úloh je sestrojit křivku, která inerpoluje hraniční data

$\mathbf{c}(0), \mathbf{c}'(0), \{\mathbf{c}''(0)\}$

$\mathbf{c}(1), \mathbf{c}'(1), \{\mathbf{c}''(1)\}$

Dostatečná ke konverzi obecně zadaných křivek.



Fergusonova kubika

- Řešíme Hermitovskou interpolaci, máme předepsáno $\mathbf{c}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{c}(1) = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{c}'(1) = \mathbf{V}_1$.
- Jak vypadá hledání kubické $\mathbf{c}(t)$ v různých bazích?
- Existuje taková baze $\mathcal{F} = (f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, ve které bude mít problém jako řešení

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{P}_0 f_0(t) + \mathbf{P}_1 f_1(t) + \mathbf{V}_1 f_2(t) + \mathbf{V}_2 f_3(t)?$$

- ANO: (viz další slajd)
- Pozor na reparametrizaci! Je vhodné upravit délku vektorů $\mathbf{V}_0$ a $\mathbf{V}_1$ tak, aby byla přibližně rovna $||\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0||$.

Fergusonova báze

$$
\begin{aligned}
f_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 && (1)\\
f_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 && (2)\\
f_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 && (3)\\
f_3(t) &= -t^2 + t^3 && (4)
\end{aligned}
$$

Několik odpovědí

V monomiální bázi $\mathcal{M}$ napíšeme křivku jako

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$$

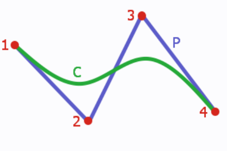
a koeficienty $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ pak dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je ve zároveň maticí přechodu $[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}$, protože analogická úloha v bázi $\mathcal{F}$ má mít z definice jednotkovou matici. Z toho důvodu máme

$$[id]_{\mathcal{M}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bézierova křivka - ideál geometrického modelování



Vše je založeno na Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše n

$$\mathcal{B}_n = (B_0^n(t), B_1^n(t), \cdots, B_n^n(t)),$$

kde $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$. Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{n}^{i=0} \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$ jsou kontrolní body.

http://cagd-applets.webarchiv.kit.edu/mocca/html/noplugin/inhalt.html

Výhody Bernsteinovy báze

- Vznikla jako pravděpodobnostní funkce při konstrukčním důkazu Weierstrassovy věty.
- Nezápornost, symetrie a rozložní extrémů poskytují ideální modelářský základ.
- Rozklad jednotky poskytuje convex hall a variation diminishing vlastnosti.
- Algebraické vlastnosti Baze poskytují jednoduché algoritmy De Casteljau, degree elevation a pro derivování.
- Nejstabilnější báze na intervalu $[0, 1]$.

Téma je standardní - viz doplňkové materiály na webu.

Cesta k NURBS plochám

Non Uniform Rational B-Splines

- Chceme lokální kontrolu, potřebujeme splajny (spline).
- Potřebujeme neuniformní definiční oblast kvůli různě velkým detailům.
- Potřebujeme racionální funkce kvůli kružnicím (vede na projektivní geometrii).
- Potřebujeme funkce více (dvou) proměnných kvůli plochám.