Domácí úkol č. 9 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2014–2015

Datum odevzdání 27.4.2015 18:00

(9.1) Dokažte, že čtvercová dolní trojúhelníková matice je normální právě tehdy, když je diagonální.

Nápověda: Pro důkaz těžší implikace můžete postupovat indukcí podle řádu. Spočítejte si prvek na místě $(1,1)$ v součinech A^*A a AA^* a porovnáním ukažte, že první sloupec (kromě prvku a_{11}) je nulový. Pak použijte indukční předpoklad na vhodnou podmatici.

(9.2) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí

$$14a^2 + 14b^2 + 17c^2 - 8ab - 4ac - 4bc \geq 0 \ .$$

Kdy nastává rovnost?

Nápověda: Napište si výraz ve tvaru $(a,b,c)A(a,b,c)^T$ pro vhodnou symetrickou matici A (pozor na prvky mimo diagonálu, nejsou to příslušné koeficienty). Pak použijte charakterizaci pozitivně definitních matic.

Bonusový problém: Dokažte, že čtvercová komplexní matice A řádu n je normální, právě když $\|A\mathbf{v}\| = \|A^*\mathbf{v}\|$ pro libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.