Extrémy funkcí více proměnných

Úlohy řešitelné bez věty o multiplikátorech

Nalezněte absolutní extrémy funkce f na množině M.

1. $f(x,y) = x + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. $f(x,y) = e^x;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

3. $f(x,y) = x^2 + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

4. $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z;\ M = [-1;1] \times [-1;1] \times [-1;1]$

5. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;\ M = \mathbf{R}^3$

6. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)};\ M = \mathbf{R}^2$

7. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ a > 0, b > 0;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\};\ a > b > c > 0$

9. $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y};\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

10. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

Úlohy na větu o Lagrangeových multiplikátorech

Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M.

11. $f(x,y) = x + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$

12. $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

13. $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

14. $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + y + z \geq 0\}$

15. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

16. $f(x,y,z) = xy^2z^3;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x + 2y + 3z = a, x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$; kde $a > 0$

17. $f(x,y) = y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$

18. $f(x,y) = x^2 + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0,\ y \geq 0\}$

19. $f(x,y) = x^4 y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$

20. $f(x,y) = 2x + 4y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$

21. $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2);\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$

22. $f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

23. $f(x,y,z) = xy + yz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$

24. $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)};\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

25. $f(x,y,z) = z + e^{xy};\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$

26. $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$

27. $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$

Lokální extrémy funkcí

U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.

28. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

29. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \qquad x > 0,\ y > 0$

30. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

31. $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

32. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$

33. $f(x,y) = x^3 + y^2 + 12xy$

34. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,$

35. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

36. $f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y$

37. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$

VÝSLEDKY

1. Maximum: $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, minimum: $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. **2.** Maximum: $[1,0]$, minimum: $[-1,0]$. **3.** Maximum: $[0,1]$, $[1,0]$, minimum: $[0,0]$. **4.** Maximum: $[1,1,1]$, $[1,-1,1]$, $[-1,1,1]$, $[-1,-1,1]$; minimum: $[0,0,-1]$. **5.** Maxima se nenabývá; minimum: $[-1,-2,3]$. **6.** Maximum se nabývá v každém bodě jednotkové kružnice; minimum: $[0,0]$. **7.** Maximum: $[a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2}]$; minimum: $[-a/\sqrt{a^2+b^2}, -b/\sqrt{a^2+b^2}]$. **8.** Maximum: $[a,0,0]$, $[-a,0,0]$; minimum: $[0,0,0]$. **9.** Maximum: $[1/2,0]$; minimum: $[0,0]$ **10.** Dno nádrže bude čtverec $4m \times 4m$ a hloubka nádrže bude $2m.$ **11.** Maximum: $[1,1]$, minimum: $[0,0]$ **12.** Maximum: $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$; minimum: $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$.

13. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, nabývá tedy na M maxima a minima. Použijeme Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Položme $G = \mathbf{R}^3$,

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z.$$

Funkce f, g_1 a g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(G)$. Vypočítejme příslušné parciální derivace.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, && \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, && \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy,\\
&\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z,\\
&\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.
\end{aligned}$$

Vektory $[2x,2y,2z]$ a $[1,1,1]$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí $x = y = z$. Žádný bod s touto vlastností ovšem neleží v množině M, neboť pro bod $[x,x,x]$ by muselo současně platit $g_1(x,x,x) = 3x^2 - 1 = 0$ i $g_2(x,x,x) = 3x = 0$, což nelze. Je tedy třeba vyřešit tuto nelineární soustavu:

$$\begin{aligned}
yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0, && (1)\\
xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 &= 0, && (2)\\
xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 &= 0, && (3)\\
x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, && (4)\\
x + y + z &= 0. && (5)
\end{aligned}$$

Odečtením (2) od (1) dostaneme:

$$-z(x-y) + 2\lambda_1(x-y) = 0. \tag{6}$$

Odtud plyne, že musí být $z = 2\lambda_1$ nebo $x = y$. Podobně odečtením (3) od (2) dostaneme:

$$-x(y-z) + 2\lambda_1(y-z) = 0. \tag{7}$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Ze vztahů (6) a (7) tedy vyplývá, že musí být buď $x = y$, nebo $y = z$, nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na první případ, kdy $x = y$. Z (5) máme $z = -2x$ a (4) pak dává

$6x^2 = 1$, tj. $x = 1/\sqrt{6}$ nebo $x = -1/\sqrt{6}$. K těmto bodům lze skutečně dopočítat příslušná y, z, λ_1 a λ_2. Případy $y = z$ a $z = x$ vyřešíme obdobně. Obdržíme tyto podezřelé body:

$$\left[\tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right],$$
$$\left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

Výpočtem hodnot funkce f v uvedených bodech zjistíme, že v prvním řádku jsou body, kde funkce f nabývá maxima na M, a ve druhém řádku jsou body, kde f nabývá minima na M.

14. Množina M je kompaktní, neboť M je uzavřená polokoule. Funkce f je spojitá na M, takže nabývá na M maxima i minima. Body podezřelé z extrému budeme hledat zvlášť vzhledem k vnitřku množiny M a zvlášť vzhledem k hranici M. Mimo takto nalezené body již nemůže existovat další bod extrému, neboť je-li $\vec{x} \in A \subset M$ bod extrému vzhledem k M, pak je to i bod extrému vzhledem k A.

Vnitřek M je roven $\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z > 0\}$. Funkce f je třídy $\mathcal{C}^1$. Body podezřelé z extrému vzhledem k $\operatorname{Int} M$ jsou body, v nichž jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny 0. Platí $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$. Tento vektor je roven nulovému vektoru právě v bodech s alespoň dvěma nulovými souřadnicemi, tj. na souřadnicových osách. Body podezřelé z extrému ležící v $\operatorname{Int} M$ jsou tedy právě prvky některé z následujících množin:

$$\{[x, 0, 0];\ x \in (0, 1)\}, \quad \{[0, y, 0];\ y \in (0, 1)\} \quad \text{a} \quad \{[0, 0, z];\ z \in (0, 1)\}.$$

Hranici $H(M)$ si rozdělíme na části

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y, z] \in G_1;\ x + y + z = 0\}, \quad \text{kde} \\ &\qquad G_1 = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \\ H_2 &= \{[x, y, z] \in G_2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \text{kde} \\ &\qquad G_2 = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z > 0\}, \\ H_3 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že množiny G_1 a G_2 jsou otevřené. Pro nalezení bodů podezřelých z extrému vzhledem k množině H_1, resp. H_2, H_3, můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech.

Funkce $[x, y, z] \mapsto x + y + z$ má na $\mathbf{R}^3$ nenulový gradient, takže v případě množiny H_1 dostaneme body podezřelé z extrému řešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0, \\ xz + \lambda &= 0, \\ xy + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme jediné řešení této soustavy $[x, y, z] = [0, 0, 0]$. Tento bod leží v množině H_1, a je tedy bodem podezřelým z extrému.

V případě množiny H_2 má funkce $[x, y, z] \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$ nulový gradient pouze v bodě $[0, 0, 0]$, který není prvkem H_2, takže body podezřelé z extrému dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0, \\ xz + 2\lambda y &= 0, \\ xy + 2\lambda z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme řešení, přičemž příslušné hodnoty λ neuvádíme:

$$\left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],$$
$$\left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],$$
$$[1, 0, 0], \quad [-1, 0, 0], \quad [0, 1, 0], \quad [0, -1, 0], \quad [0, 0, 1], \quad [0, 0, -1].$$

Z těchto bodů leží v množině H_2 pouze tyto body:

$$\left[\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right],\quad \left[-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right],\quad \left[\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right],\quad \left[\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right],$$
$$[1,0,0],\quad [0,1,0],\quad [0,0,1].$$

Množinu H_3 jsme vyšetřili již v předchozím příkladu. Zde dostáváme podezřelé body

$$\left[\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right],\quad \left[-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right],\quad \left[-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right],$$
$$\left[-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right],\quad \left[\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right],\quad \left[\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6}\right].$$

Porovnáním hodnot funkce f v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá maxima na M v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right]$ a minima na M v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right]$.

15. Maximum: $[\pi/6,\pi/6,\pi/6]$; minima se nenabývá. **16.** Maximum: $[a/6,a/6,a/6]$; minima se nenabývá. **17.** Maximum: $[\sqrt3/2,1/2]$, $[-\sqrt3/2,1/2]$; minimum: $[\sqrt3/2,-1/2]$, $[-\sqrt3/2,-1/2]$.

18. Maximum: $\left[\sqrt{7\sqrt{5/12}/3},\sqrt{5/12}\right]$, $\left[-\sqrt{7\sqrt{5/12}/3},\sqrt{5/12}\right]$; minimum: $[0,0]$.

19. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^4,\qquad [x,y]\in\mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y\in(-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2;\ x^4+y^4=16, x>-1\},$$
$$H_2=\{[-1,y]\in\mathbf{R}^2;\ y\in\langle-\sqrt[4]{15},\sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y)=x^4+y^4-16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=4x^3,\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=4y^3,\qquad [x,y]\in\mathbf{R}^2.$$

Pro každé $[x,y]\in H_1$ platí $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^4+y^4=16, \tag{1}$$
$$4x^3y=\lambda 4x^3, \tag{2}$$
$$x^4=\lambda 4y^3. \tag{3}$$

Z (2) vyplývá, že $x=0$ nebo $y=\lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y=\pm2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x=\sqrt2 y$ nebo $x=-\sqrt2 y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},\frac{2}{\sqrt[4]5}\right],\ \left[\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},-\frac{2}{\sqrt[4]5}\right],\ \left[-\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},\frac{2}{\sqrt[4]5}\right],\ \left[-\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},-\frac{2}{\sqrt[4]5}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x>-1$. Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y)=y,\qquad y\in\langle-\sqrt[4]{15},\sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1,\sqrt[4]{15}],\qquad [-1,-\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},\frac{2}{\sqrt[4]5}\right]$ a minima v $\left[\frac{2\sqrt2}{\sqrt[4]5},-\frac{2}{\sqrt[4]5}\right]$.

20. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\}, \\ H_2 &= \{[0,y] \in \mathbf{R}^2;\ y \in \langle 0,1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x,0] \in \mathbf{R}^2;\ x \in \langle 0,1 \rangle\}. \end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda \frac{1}{4} x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda \frac{1}{4} y^{-3/4}. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0],\ [0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

21. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1) = f(x,y,-1) < f(x,y,z) < f(x,y,0), \qquad [x,y,z] \in \mathbf{R}^3,\ z \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Pro každé $[x,y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$
$$2x + y = \lambda 2x, \tag{2}$$
$$x + 2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme $(3-2\lambda)(x+y) = 0$. To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],$$
$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

22. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0],\ [0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\},$$
$$H_2 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}.$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2],\ [0,-2],\ [0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$
$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \tag{2}$$
$$-2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body $[0,2],\ [0,-2],\ [-1,\sqrt{3}],\ [-1,-\sqrt{3}]$. První dva ovšem neleží v H_2. Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2,0]$ a bod $[2,0]$, který ovšem neleží v H_2.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

23. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce $g_1,\ g_2$ jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.
\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \tag{1}$$
$$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \tag{2}$$
$$y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x + y + z = 1. \tag{5}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$. V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

24. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).
\end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1 - 2(x^2+7y^2)) = 0, \tag{8}$$
$$2y(7 - (x^2+7y^2)) = 0. \tag{9}$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0],\ [1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, 0],\ [0,1],\ [0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \quad (1)$$

$$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \quad (2)$$

$$x^2 + 4y^2 = 1. \quad (3)$$

Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2 + 7y^2) = -3$, což je spor. Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0, 0],\ [1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, 0],\ [0, 1/2],\ [0, -1/2],\ [1, 0],\ [-1, 0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0, 1/2],\ [0, -1/2]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

25. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce $f,\ g_1$ i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) &= 2x,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) &= 2y,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) &= -2z. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \quad (1)$$

$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \quad (2)$$

$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (5)$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}],\ [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}],\ [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}],\ [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}],\ [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

26. Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbf{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2z &\qquad& \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2x &\qquad& \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 1\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2y && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -2y\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 2x + 1 && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y) = 2z && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y) = -2z
\end{aligned}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z),\ (1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M. Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$
$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$
$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$
$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$
$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

27. Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbf{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,0];\ x \in \langle 0,1\rangle\}, \\ H_2 &= \{[0,y];\ y \in \langle 0,1\rangle\}, \\ H_3 &= \{[x,y];\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2=1\}. \end{aligned}$$

Je-li $[x,y] \in H_1$, platí $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0,0]$ a $[1,0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0,0]$ a $[0,1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vektor $(2x,2y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2+y^2 = 1 \tag{1}$$
$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$
$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Platí tedy buď $x=y$ nebo $-1 = x^2+xy+y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body: $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$, $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0,0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$.

28. $[1,1]$ – lokální minimum, $[-1,-1]$ – lokální minimum, $[0,0]$ – není extrém **29.** $[5,2]$ – lokální minimum **30.** $[0,0]$ – lokální minimum, $[x,y]$ splňující $x^2+y^2=1$ – lokální maximum (ne však ostré) **31.** $[2l\pi,0]$ – lokální maximum, $[(2l+1)\pi,-2]$ – není lokální extrém, $l \in \mathbf{Z}$ **32.** $[0,0,0]$ – není lokální extrém, $[2,2,2]$ – lokální minimum **33.** $[0,0]$ – není lokální extrém, $[24,-144]$ – lokální minimum **34.** $[0,0]$ – není lokální extrém, $[1,1]$ – lokální minimum **35.** $[0,0]$ – lokální minimum, $[-1/4,-1/2]$ – není lokální extrém **36.** $[7\pi/12+l\pi+k\pi/2, 7\pi/12+l\pi-k\pi/2]$ – lokální maximum (k sudé), není lokální extrém (k liché), $[11\pi/12+l\pi+k\pi/2, 11\pi/12+l\pi-k\pi/2]$ – není lokální extrém (k sudé), lokální minimum (k liché), $k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{Z}$ **37.** $[1,2]$ – lokální minimum