Cvičení 1

Úloha 1. *Ukažte, že neplatí* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ *pro všechna* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

Úloha 2. *Ať* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Ukažte, že* $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$.

Úloha 3. *Nalezněte střed a poloměr sféry o rovnici*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$$

Úloha 4. *Načrtněte a popište množinu* $M \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
(b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 = -1\}$
(c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9\}$
(d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 - x^2 = 0, x \geq 0\}$
(e) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z = 0\}$
(f) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - z = 0\}$
(g) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy - z = 0\}$

Úloha 5. *Načrtněte množinu* M *a určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny* M, *hromadné body a izolované body. Je množina* M *otevřená či uzavřená?*

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}$
(b) $M = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in (0, 1), \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0, 1)\}$
(c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 \leq 25, x - 2y - 3 < 0, x \geq 0, y > 0\} \cup \{(4, -2)\}$
(d) $M = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

Úloha 6. *Nalezněte limitu posloupnosti* $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ *pokud existuje.*

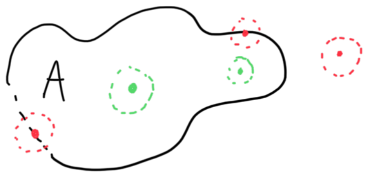
(a) $\mathbf{x}_k = (k - \sqrt{k^2 + k}, \sqrt[k]{k}, \frac{1}{k})$
(b) $\mathbf{x}_k = (\frac{\sin k}{k}, k\sin(\frac{1}{k}))$
(c) $\mathbf{x}_k = (\cos k\pi, \frac{1}{k!})$
(d) $\mathbf{x}_k = (e^{-k}, \ln(\frac{1}{e} - \frac{1}{k}))$
(e) $\mathbf{x}_k = (\frac{1}{k}\cos k, \frac{1}{k}\sin k, 1)$

Domácí úkol: Úloha 5. (c)

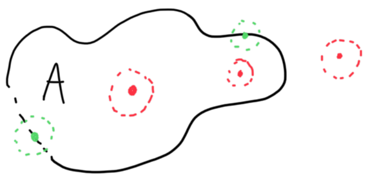
Připomenutí

- Nechť $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ **konverguje k $\mathbf{x}$** a píšeme $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ jestliže
$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0.$$
Pokud takové $\mathbf{x}$ existuje, řekneme, že posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ **konverguje**. V opačním případě řekneme, že **diverguje**.
- Posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ konverguje právě tehdy, když konverguje po složkách.

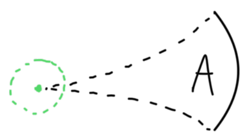
- **Okolí bodu** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je libovolná množina tvaru
$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}$$
pro $\varepsilon > 0$. Pokud nás nezajímá poloměr ε, tak píšeme prostě $U(\mathbf{x})$.
- **Prstencové okolí bodu** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je libovolná množina tvaru $P(\mathbf{x}, \varepsilon) = U(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\}$. Pokud nás nezajímá poloměr ε, tak píšeme prostě $P(\mathbf{x})$.
- Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** $A \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže existuje okolí bodu $\mathbf{x}$ takové, že $U(\mathbf{x}) \subseteq A$.
  - Vnitřní bod musí být prvkem množiny A.



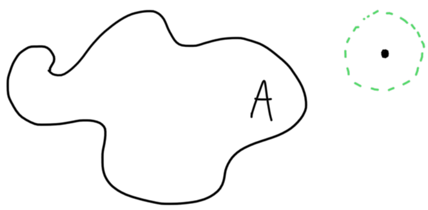
- Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá **vnitřek** množiny A a značí se $\operatorname{Int} A$.
- Řekneme, že množina A je **otevřená**, pokud se rovná svému vnitřku, tj. $A = \operatorname{Int} A$.
  „Množina je otevřená, pokud jsou všechny její body vnitřní.“
- Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **hraničním bodem množiny** $A \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud pro každé okolí $U(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x}$ platí $U(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset$ a zároveň $U(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.
  - Hraniční bod může a nemusí být prvkem množiny A.



- Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá **hranice** množiny A a značí se ∂A.
- **Uzávěr** množiny A je množina $\overline{A} = A \cup \partial A$.
- Řekneme, že je množina A **uzavřená**, pokud $A = \overline{A}$.
  „Množina je uzavřená, pokud obsahuje celou svou hranici.“
- Množina nemusí být ani otevřená, ani uzavřená. Množiny $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset$ jsou obojí.
- Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **hromadným bodem množiny** $A \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud pro každé prstencové okolí $P(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x}$ platí $P(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset$.
  - Hromadný bod může a nemusí být prvkem množiny A.



- Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **izolovaným bodem množiny** $A \subseteq \mathbb{R}^n$, pokud existuje okolí $U(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x}$ takové, že $U(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$.
  - Izolovaný bod musí být prvkem množiny A.



Úvod

Zadání

1. Nalezněte rovnici roviny s normálovým vektorem $(-1, 2, 1)$, která obsahuje bod $(1, 2, 1)$.
2. Který z bodů $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2)$ a $\boldsymbol{b} = (2, 3, 1)$ je nejblíže rovině popsané rovnicí $x - y = 0$?
3. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (2, 3, 0)$ a $\boldsymbol{b} = (1, 0, 3)$. Nalezněte $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{v}\|$ a ukažte, že $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.
4. Ukažte, že neplatí $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ pro všechna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$.
5. Ať $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\|$.
6. V rovině jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (2, 0)^T$ a $\boldsymbol{v} = (0, 1)^T$ (v této úloze budeme psát vektory v $\mathbb{R}^2$ do sloupce). Ať $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nalezněte obsah S_1 rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a obsah S_2 rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$.
7. Načrtněte množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1 - x^2\}$.
8. Popište a načrtněte množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$, jestliže
   (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;
   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4y^2 - z = 0\}$;
   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 8y + 4z + 55 = 0\}$.
   (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
9. Nalezněte střed a poloměr sféry o rovnici
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$$
10. Nalezněte, pokud existuje, limitu posloupnosti $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, jestliže
   (a) $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k-3k^2}{k+k^2}\right)$;
   (b) $\boldsymbol{x}_k = (1, \sin(\pi k), k)$;
   (c) $\boldsymbol{x}_k = \left(k - \sqrt{k^2 + k}, \sqrt[k]{k}, \frac{1}{k}\right)$;
   (d) $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{\sin k}{k}, k \sin \frac{1}{k}\right)$.
11. Rozhodněte, zda je množina M otevřená nebo uzavřená a nalezněte její vnitřek, hranici, uzávěr, hromadné body a izolované body, jestliže
   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}$;
   (b) M je přímka v rovině (např. $M = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$);
   (c) $M = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
   (d) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}$;
   (e) $M = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in (0, 1), \varphi \in [0, 2\pi], z \in (0, 1)\}$.

Výsledky

1. $-x + 2y + z - 4 = 0$.
2. Bod $\boldsymbol{b}$.
3. $\boldsymbol{v} = (9, -6, -3)$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{126}$.
4. Stačí položit například $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$ a $\boldsymbol{w} = (0, 1, 0)$.
6. $S_1 = 2$ a $S_2 = 2 \det \boldsymbol{A} = 4$.
7. Množina ležící mezi dvěma parabolami $y = 1 - x^2$ a $y = x^2 - 1$.
8. (a) Čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
   (b) Hyperbolický paraboloid.
   (c) Elipsoid.
   (d) Množina ležící mezi dvěma sférami se středem v počátku. První sféra má poloměr 1 a druhá má poloměr 2.
9. $S = (1, 2, -4)$ a $R = 6$.
10. (a) $(0, -3)$.
    (b) limita neexistuje.
    (c) $(-1, 1, 0)$.
    (d) $(0, 1)$.
11. (a) Otevřená, $\operatorname{int}(M) = M$,

$$\begin{aligned} \partial M &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 1\right\}, \\ \overline{M} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq 1\right\}, \end{aligned}$$

hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.

(b) Uzavřená, $\operatorname{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = M$, $\overline{M} = M$, hromadné body jsou všechny body množiny M, M nemá žádné izolované body.

(c) Není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}(M) = \emptyset$, $\partial M = \overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, jediný hromadný bod je $(0, 0)$, izolované body jsou všechny body množiny M.

(d) Není otevřená ani uzavřená,

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(M) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}, \\ \partial M &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \{(0, 0), (2, 0)\}, \end{aligned}$$

$\overline{M} = M \cup \{(0, 0)\}$, hromadné body jsou všechny body množiny

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

jediný izolovaný bod je $(2, 0)$.

(e) Otevřená, $\operatorname{int}(M) = M$, $\partial M = N_1 \cup N_2$, kde

$$N_1 = \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in \{0,1\}, \varphi \in [0,2\pi], z \in (0,1) \right\},$$
$$N_2 = \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi], z \in \{0,1\} \right\}.$$

Dále $\overline{M} = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi], z \in [0,1]\}$, hromadné body jsou všechny body množiny $\overline{M}$, M nemá žádné izolované body.