Cvičení 11

Úloha 1.

(a) *Rozhodněte, zda jsou vektorová pole*
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y+z, x^2, x+y)$$
a
$$\boldsymbol{G}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$
potenciální, a v pozitivních případech nalezněte potenciál.

(b) *V pozitivním případě nalezněte také jeho potenciál, který má v počátku hodnotu* 5.

(c) *V pozitivním případě spočtěte jeho křivkový integrál přes libovolnou křivku s počátečním bodem* $(0,0,0)$ *a koncovým* $(1,1,1)$.

Úloha 2. *Určete funkci* $g(x)$ *tak, aby vektorové pole*
$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y\sin x + xy\cos x + e^y, g(x) + xe^y)$$
bylo potenciální. Určete jeho potenciál.

Úloha 3. *Spočtěte obsah plochy* S*, která je částí paraboloidu* $z = x^2 + y^2$ *pod rovinou* $z = 2$.

Tj. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$.

Úloha 4. *Spočtěte plošný integrál*
$$\iint_S xy \,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$
kde S *je část plochy* $x^2 + z^2 = 1$ *vymezená rovinami* $y = 0$ *a* $x + y = 2$.

Úloha 5. *Spočtěte tok vektorového pole* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z - x^2 - y^2, ye^x, x^2y)$ *protékající směrem vzhůru částí paraboloidu* $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Úloha 6. *Spočtěte plošný integrál z vektorového pole*
$$\iint_{(S,N)} (x, -z, y) \,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$
kde S *je část sféry* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *ležící v 1. oktantu (tj.* $x, y, z \geq 0$*), která je orientovaná normálou s kladnou* z*-ovou souřadnicí.*

Dále řeště úlohy ze zadání Křivkový integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana Cvičení 10) na potenciální vektorové pole a ze zadání Plošný integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana tohoto dokumentu) na plošný integrál z definice.

Domácí úkol: Příprava na 2. semestrální test

Potenciál vektorového pole

- **Potenciál** vektorového pole $\boldsymbol{F}$ je skalární funkce $f \in C^1$ taková, že
$$\nabla f = \boldsymbol{F}.$$
Vektorové pole je **potenciální**, pokud má potenciál.
- Nutnou, a na otevřené konvexní množině i postačující podmínkou, aby vektorové pole $\boldsymbol{F} \in C^1$ bylo potenciální, je
$$\underline{\text{v } \mathbb{R}^2}: \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0;$$
$$\underline{\text{v } \mathbb{R}^3}: \quad \nabla \times \boldsymbol{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (0, 0, 0),$$
kde $\nabla \times F$ nazýváme **rotace**.
- Pokud má vektorové pole $\boldsymbol{F}$ potenciál f, platí
$$\int_C \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = f(B) - f(A),$$
kde C je libovolná[1] křivka s počátečním bodem A a koncovým B.

Plošný integrál skalární funkce

- **Plošný integrál skalární funkce** f **přes plochu** S, která má parametrizaci $\boldsymbol{\Phi}(u, v) \colon D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se spočte jako
$$\int_S f\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_D f(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$
- Plošný integrál se po dosazení vlastně převede na výpočet dvojného integrálu.
- Plošný integrál skalární funkce přes plochu nezávisí ani na parametrizaci, ani na orientaci plochy.
- Plošný integrál jedničky ($f \equiv 1$) odpovídá obsahu plochy S, tj.
$$\text{obsah } S = \int_S 1\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$
- Pokud je plocha S grafem funkce $g(x, y) \colon D \to \mathbb{R}$, tj. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = g(x, y), (x, y) \in D\}$, vzorec pro plošný integrál se zjednoduší na
$$\int_S f\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

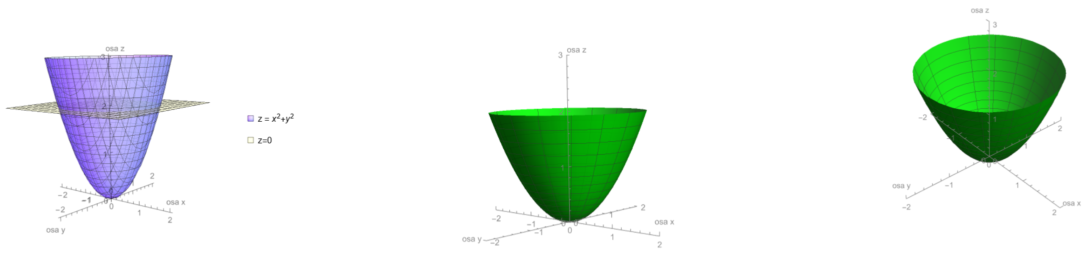
Plošný integrál vektorového pole

- **Plošný integrál vektorového pole** $\boldsymbol{F}$ **přes orientovanou plochu** S, která má parametrizaci $\boldsymbol{\Phi}(u, v) \colon D \to \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a orientaci $\boldsymbol{N}$, se spočte jako
$$\int_{(S, \boldsymbol{N})} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_D \boldsymbol{F}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$
- $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ je normálový vektor.
- Plošný integrál vektorového pole přes plochu závisí na orientaci plochy.
- Pokud najdeme opačnou parametrizaci (tj. normálový vektor směřuje opačným směrem, než má), tak není třeba zoufat, protože opačná orientace odpovídá opačnému znaménku u integrálu.
- Pokud je plocha S grafem funkce $g(x, y) \colon D \to \mathbb{R}$, tj. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = g(x, y), (x, y) \in D\}$ s orientací, že její normálový vektor má kladnou z-ovou souřadnici, tak se vzorec pro plošný integrál zjednoduší na
$$\iint_{(S, \boldsymbol{N})} F\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_D F(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

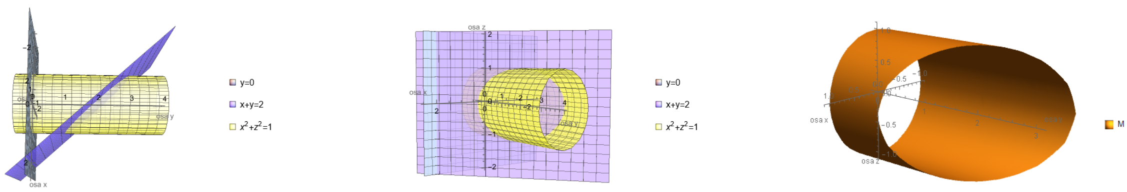
[1] ležící v množině, kde je f potenciálem F

Ilustrace k úlohám

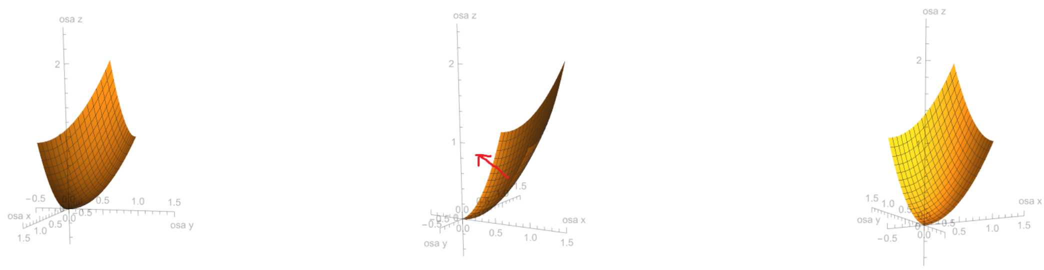
Úloha 3.



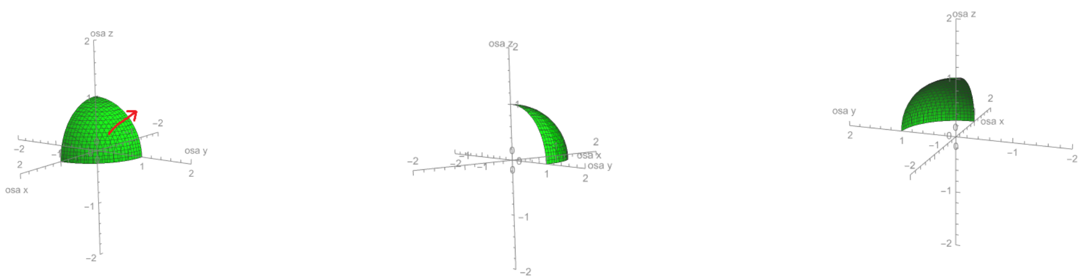
Úloha 4.



Úloha 5.



Úloha 6.



Plošný integrál

Zadání

1. Nalezněte parametrizaci plochy S, jestliže

   (a) S je část sféry $x^2+y^2+z^2=36$ ležící mezi rovinami $z=0$ a $z=3\sqrt{3}$;

   (b) S je část roviny $z=x+3$ ležící v množině popsané nerovnostmi $x^2+y^2=1$ a $x\geq 0$;

   (c) S je plocha vzniklá rotací křivky $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[-1,1]$, (ležící v rovině xy) kolem osy x.

2. Vypočtěte obsah plochy S, jestliže

   (a) S je plocha s parametrizací

   $$\mathbf{\Phi}(u,v)=((a+b\cos u)\cos v,(a+b\cos u)\sin v,b\sin u),\quad u,v\in[0,2\pi],$$

   kde $0<b<a$;

   (b) S je část paraboloidu $z=x^2+y^2$ ležící pod rovinou $z=2$;

   (c) S je část sféry $x^2+y^2+z^2=2$, která leží uvnitř kuželu $z^2=x^2+y^2$.

3. Vypočtěte plošný integrál z funkce f přes plochu S, jestliže

   (a) $f(x,y,z)=x$ a S je trojúhelník s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,-2,0)$, $(0,0,4)$;

   (b) $f(x,y,z)=y^2$ a S je část sféry $x^2+y^2+z^2=1$, která leží nad kuželem $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

   (c) $f(x,y,z)=x^2z+y^2z$ a S je polosféra $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$;

4. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S, jestliže

   (a) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y,-x,2z)$ a $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=4,z\geq 0\}$ je orientovaná normálovým polem s nekladnou třetí komponentou;

   (b) $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ a $S=\{(x,y,x\sin y)\in\mathbb{R}^3\,|\,x\in[0,2],y\in[0,\pi]\}$ je orientovaná normálovým polem s nezápornou třetí komponentou;

5. Je dáno vektorové pole $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x,y,5)$ a plocha

   $$S=\partial\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x^2+z^2\leq 1,y\geq 0,x+y\leq 2\right\}$$

   orientovaná vnějším normálovým polem. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S

   (a) z definice plošného integrálu;

   (b) pomocí Gaussovy věty.

6. Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ přes orientovanou plochu S, jestliže

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (4x, y, 4z)$, S je sféra $x^2+y^2+z^2 = 4$ orientovaná vnějším normálovým polem;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$, S je hranice množiny $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, kde $a,b,c > 0$, orientovaná vnějším normálovým polem;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^2, xz^3, (z-1)^2)$, S je hranice množiny ohraničené plochami $x^2+y^2 = 16, z = 1, z = 5$, která je orientovaná vnějším normálovým polem.

7. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte tok vektorového pole $\nabla \times \boldsymbol{F}$ orientovanou plochu S, jestliže

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2\sin z, y^2, xy)$, S je část paraboloidu $z = 1-x^2-y^2$ ležící nad rovinou $z = 0$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (ze^y, x\cos y, xz\sin y)$, S je polosféra $x^2+y^2+z^2 = 16$, $y \geq 0$, a její normálové pole má nezápornou druhou komponentu;

(c) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (6yz, 5x, yze^{x^2})$, plocha S je část paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2+y^2$ splňující $0 \leq z \leq 4$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu.

8. Pomocí Stokesovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél orientované křivky C, jestliže

(a) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (1, x+yz, xy-\sqrt{z})$, C je okraj části roviny $3x+2y+z = 1$ nacházející se v prvním oktantu a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora;

(b) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y^3, -x^3, y^2+z^3)$, C je průnik válcové plochy $x^2+y^2 = 1$ s rovinou $x+y+z = 1$ a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora.

Výsledky

1. (a) $\mathbf{\Phi}(u,v) = (6\cos u \sin v, 6\sin u \sin v, 6\cos v),\ u \in [0, 2\pi],\ v \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) $\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 3 + u\cos v),\ u \in [0,1],\ v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) $\mathbf{\Phi}(u,v) = \left(u, \frac{\cos v}{1+u^2}, \frac{\sin v}{1+u^2}\right),\ u \in [-1,1],\ v \in [0, 2\pi]$.

2. (a) $4\pi^2 ab$;
   (b) $\frac{13\pi}{3}$;
   (c) $4\pi(2-\sqrt{2})$.

3. (a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$;
   (b) $\frac{\pi}{12}(8-5\sqrt{2})$;
   (c) 16π.

4. (a) $-\frac{32}{3}\pi$;
   (b) $\frac{\pi^2}{2}$.

5. 4π.

6. (a) 96π;
   (b) $\frac{3}{4}a^2b^2c^2$;
   (c) 256π.

7. (a) 0;
   (b) 16π;
   (c) -152π.

8. (a) $\frac{1}{24}$;
   (b) 2π.