Cvičení 2

Úloha 1. *Určete definiční obor funkce f. Dále určitě, co je jeho vnitřek a hranice. Je definiční obor funkce f otevřená či uzavřená množina?*
(a) $f(x,y) = \sqrt{-x^2 - 2x - y^2 + 3}$
(b) $f(x,y) = \ln(x \ln(x-y))$
(c) $f(x,y) = \arcsin(\frac{y-1}{x})$

Dále řeště úlohy ze zadání Funkce (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: *Nalezněte definiční obor D, obor hodnot a hladinu výšky 0 funkce f, jestliže*

$$f(x,y,z) = \frac{\ln(xz)}{\sqrt{x-y}}.$$

Připomenutí

Pro funkci $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ značíme

- D **definiční obor** funkce f,
- $\operatorname{ran}(f) := f(D) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in D\}$ **obor hodnot** funkce f,
- $\operatorname{gr}(f) := \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+m}, \mathbf{x} \in D\}$ **graf** funkce f,
- je-li $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$, pak **hladina** funkce f výšky c (případně **vrstevnice** funkce f výšky c) je množina

$$\operatorname{lev}(f; c) := f^{-1}(\{c\}) = \{\mathbf{x} \in D, f(\mathbf{x}) = c\}.$$

Funkce

Zadání

1. Nalezněte definiční obor funkce

   (a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

   (b) $f(x,y) = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{|y-x|}}$;

   (c) $f(x,y) = \sqrt{3x+y+1} - \frac{1}{\sqrt{2y-x}}$;

2. Nalezněte definiční obor D a obor hodnot funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$.

3. Nalezněte definiční obor a hladinu výšky 1 funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sin(\pi(x+y))}$.

4. Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$. Dále určete hladiny výšky $c \geq 0$ funkce f.

5. Načrtněte hladinu funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ výšky 1.

6. Nalezněte definiční obor D, obor hodnot a hladiny výšky $c \in f(D)$ funkce f, jestliže

   (a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;

   (b) $f(x,y) = \ln(x-y)$;

   (c) $f(x,y) = xy$;

   (d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2-2x+2y^2+4y+z^2+2}$;

   (e) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

7. Určete definiční obor vektorového pole

   $$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

   Dále znázorněte $\boldsymbol{F}(x,y)$ v rovině.

8. Je dána vektorová funkce

   $$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg} y, \frac{\ln z}{x}\right).$$

   Určete definiční obor D a obor hodnot $\boldsymbol{f}(D)$. Nalezněte množinu $\boldsymbol{f}^{-1}((0,0))$ všech vzorů bodu $(0,0)$ při zobrazení $\boldsymbol{f}$.

Výsledky

1. (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq \pm x\}$;

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0, y > 0, y \neq x\}$;

   (c) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \geq -3x - 1, y > \frac{x}{2}\right\}$;

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq \pm 1, y \geq x^2\}$, $f(D) = \mathbb{R}$.

3. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x+k) \,|\, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{lev}(f;1) = \left\{(x, -x + \frac{1}{2} + 2k) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\}$, $\operatorname{lev}(f;c) = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 9 - c^2\}$ pro $c \in [0,3]$ a $\operatorname{lev}(f;c) = \emptyset$ pro $c > 3$.

6. (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\operatorname{lev}(f;c) = \begin{cases} \{(x, -x-1) \,|\, x \neq 1\} & \text{pro } c = 0, \\ \{(x, c^2x^2 - (2c^2+1)x + c^2 - 1) \,|\, x > 1\} & \text{pro } c > 0, \\ \{(x, c^2x^2 - (2c^2+1)x + c^2 - 1) \,|\, x < 1\} & \text{pro } c < 0; \end{cases}$$

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > y\}$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\operatorname{lev}(f;c) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x - e^c\right\};$$

   (c) $D = \mathbb{R}^2$, $f(D) = \mathbb{R}$ a

$$\operatorname{lev}(f;c) = \begin{cases} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \frac{c}{x}\right\} & \text{pro } c \neq 0, \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\} & \text{pro } c = 0; \end{cases}$$

   (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 \geq 1\}$, $f(D) = [0, \infty)$ a pro $c \in f(D)$ je

$$\operatorname{lev}(f;c) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 = c^2 + 1\right\};$$

   (e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$, $f(D) = (0, \infty)$ a pro $c \in (0,\infty)$ je

$$\operatorname{lev}(f;c) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}\right\}.$$

7. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 0\}$.

8. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 0, z > 0\}$, $f(D) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{f}^{-1}((0,0)) = \{(x,0,1) \,|\, x \neq 0\}$.