Cvičení 6

Úloha 1. *Nalezněte diferenciál a 2. diferenciál funkce* $f(x,y) = \ln(x-3y)$ *v bodě* $(7,2)$. *Dále určete Taylorův polynom 2. řádu funkce* f *v bodě* $(7,2)$ *a použijte ho k určení přibližné hodnoty funkce* f *v bodě* $x = 6,9$ *a* $y = 2,02$.

Úloha 2. *Spočtěte všechny druhé parciální derivace funkce v bodě , napište čemu se rovná druhý diferenciál funkce* f *v bodě* **a** *dále napište Taylorův polynom druhého stupně funkce* f *v bodě* **a**, *kde*
a) $f(x.y) = x^2y^3 - 2x^4 + y^2$, $\mathbf{a} = (0,0)$
b) $f(x.y) = \frac{1}{x-y}$, $\mathbf{a} = (2,1)$.

Úloha 3. *Nalezněte všechny tečné roviny k ploše*

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = \frac{9}{4} - z^2\right\},$$

které jsou kolmé na přímku

$$p = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x+2}{2} = y+2 = 1-z\right\}.$$

Úloha 4. *Určete úhel, který v bodě* $(1,0,0)$ *svírá graf funkce* $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *a plocha o rovnici* $\sin(xy) = -z$.

Úloha 5. *Určete hodnotu parametru* $s \in \mathbb{R}$, *aby se plochy* $x^2 + y^2 + (z-s)^2 = 18$ *a* $z = x^2 + y^2$ *protínaly pod úhlem* $\frac{\pi}{2}$.

Dále řeště úlohy ze zadání Funkce třídy C^k (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 1.

Připomenutí

- **Druhý diferenciál** funkce f, která je „dostatečně pěkná" v bodě $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, je bilineární forma $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a})\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je reprezentována **Hessovou maticí**

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

  - Hessova matice je symetrická. Stačí tedy spočítat horní (nebo dolní) trojúhelník a zbytek je symetrický.
  - Např. pro funkci $f(x, y, z)$ tří proměnných (analogicky pro jiný počet proměnných) máme

$$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{a})[(h_1, h_2, h_3), (k_1, k_2, k_3)] = (h_1, h_2, h_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

- Ať $k \in \mathbb{N}_0$ a f je reálná funkce třídy C^k na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Polynom

$$T_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \nabla^i_{\mathbf{x}-\mathbf{a}} f(\mathbf{a})$$

  se nazývá **Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě a**.

  Speciální případy
  - $T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$,
  - $T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a})$,
  - $T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$.
- Nechť $f \in C^1(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ a $M = \operatorname{lev}(f; f(\mathbf{a}))$.
  - Vektor $\nabla f(\mathbf{a})$ je **vektor kolmý** k M v bodě $\mathbf{a}$.
  - **Tečná nadrovina** k M v bodě $\mathbf{a}$ je nadrovina popsaná rovnicí $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$.
- **Úhel mezi dvěma plochami** ve (společném) bodě $\mathbf{x_0}$ se definuje jako úhel mezi jejich tečnými rovinami v daném bodě.
  - **Úhel mezi dvěma rovinami** se definuje jako ostrý úhel mezi jejich normálovými vektory. Ze dvou možností se uvažuje právě ostrý úhel α, tj. $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a platí

$$\cos \alpha = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|},$$

    kde n_1 a n_2 jsou normálové vektory ploch v daném bodě.

Funkce třídy C^k

Zadání

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^2 + xy - y$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$;
   (b) $f(x,y) = xe^{\sin y}$, $\boldsymbol{a} = (-1,0)$;
   (c) $f(x,y,z) = xyz$, $\boldsymbol{a} = (1,1,2)$.
2. Nalezněte jednotkový normálový vektor k ploše o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v bodě
   (a) $(1,0,0)$;
   (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ v bodě $(4,3,4)$.
4. Nalezněte úhel sevřený dvěma plochami v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) plochy jsou zadány rovnicemi $2x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3 = 0$ a $\boldsymbol{a} = (0,-1,0)$;
   (b) plochy jsou zadány rovnicemi $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$.
5. Nalezněte všechny body na elipsoidu $3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $-12x + 2y + 6z = 0$.
6. Nalezněte všechny body na ploše $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin.
7. Ať $f(x,y,z)$ je třídy C^1. Vyjádřete $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve sférických souřadnicích (tj. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$).
8. Uvedené rovnice přepište do nových proměnných:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$;
9. Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $\varphi \in C^2(\Omega)$ a $\boldsymbol{F} \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$,
   $$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$
   $$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$
   Ukažte, že

(a) $\nabla \times \nabla\varphi = 0$;

(b) $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} = 0$;

(c) $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \Delta\boldsymbol{F}$.

10. Ať $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A}$ je reálná matice 3×3 a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Co musí splňovat matice $\boldsymbol{A}$, aby

    (a) $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$;

    (b) $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$.

Výsledky

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže

   (a) $1 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2)$;

   (b) $-1 + (x+1) - y + (x+1)y - \frac{y^2}{2}$;

   (c) $2+2(x-1)+2(y-1)+(z-2)+2(x-1)(y-1)+(x-1)(z-2)+(y-1)(z-2)$.

2. (a) $(1,0,0)$;

   (b) $\frac{1}{2}(\sqrt{2},1,1)$.

3. $\frac{1}{2}(x-4) + \frac{2}{3}(y-3) - (z-4) = 0$.

4. (a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

   (b) $\varphi = 0$.

5. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

6. $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,-1,0)$.

7. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi},$$

   kde $g(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

8. (a) $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, kde $g(u,v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$;

   (b)
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

   kde $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$;

   (c)
   $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

   kde $g(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

10. (a) $\operatorname{Tr}\boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$;

    (b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.