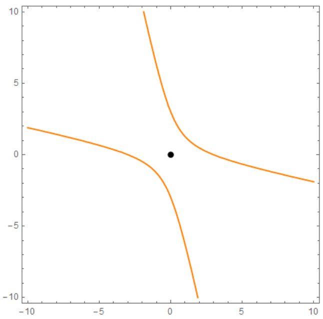
Cvičení 7

Úloha 1. *Klasifikujte všechny lokální extrémy funkce f.*
(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$
(b) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, *kde* $x, y, z > 0$

Úloha 2. *Kruhový talíř o rovnici* $x^2 + y^2 \leq 1$ *zahříváme na teplotu* $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. *Určete, jaké jsou nejteplejší a nejstudenější body na talíři.*

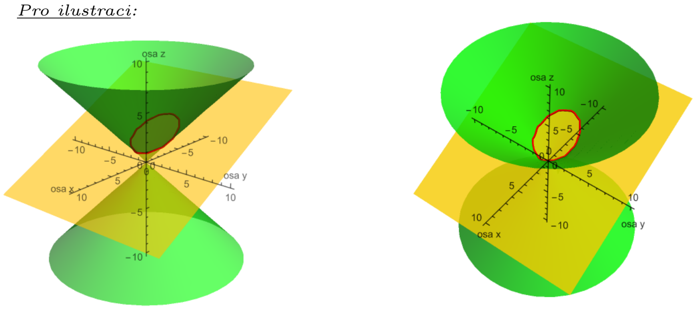
Úloha 3. *Určete vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly o rovnici* $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ *od bodu* $(0,0)$.

Pro ilustraci:



Úloha 4. *Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s nejvyšší z-ovou souřadnicí) na křivce, která vznikne jako průnik ploch o rovnicích* $x^2 + y^2 = z^2$ *a* $x + 2z = 4$.

Pro ilustraci:



Úloha 5. *Do koule o poloměru R vepíšeme válec. Zjistěte, jaký největší povrch pláště může takový válec mít.*

Dále řeště úlohy ze zadání Extrémy funkcí (viz Moodle nebo též konec tohoto dokumentu).

Domácí úkol na osmé cvičení: Naučit se na písemku :)

Připomenutí

Konvexita

- **Věta**: Nechť f je reálná funkce třídy C^2 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom f je konvexní na Ω právě tehdy, když $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x})$ je pozitivně semidefinitní pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Metoda nejmenších čtverců

- **Tvrzení**: Ať $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Potom $\boldsymbol{a}$ je bod minima funkce $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ právě tehdy, když $\boldsymbol{a}$ je řešením soustavy rovnic
$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}.$$
- To znamená, že pokud má soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ více rovnic než neznámých, přiblížení k řešení pomocí metody nejmenších čtverců dostaneme vyřešením soustavy $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$.

Volné extrémy

- **Nutná podmínka existence lokálního extrému** funkce $f \in C^1$ ve vnitřím bodě $a \in \mathbb{R}^n$ jejího def. oboru je, že
$$\nabla f(a) = (0, 0, \ldots, 0). \tag{1}$$
  - Jinými slovy, uvnitř množiny hledáme body podezřelé z extrému jako body, kde je gradient nulový. Řešíme tedy soustavu rovnic, která vznikne tak, že položíme všechny parciální derivace rovny nule.
  - Jedná se pouze o nutnou podmínky, tzn. dostáváme pouze kandidáty na lokální extrémy, ale ještě nevíme, zda tam skutečně lok. extrém je (případně jaký)!
  - Body, kde platí (1), se nazývají **stacionární body**.
- Ve stacionárních bodech funkce $f \in C^2$ lze aplikovat následující **pravidlo pro klasifikaci lokálních extrémů**. Pokud je Hessova matice funkce ve vyšetřovaném bodě podezřelém z extrému
  - pozitivně definitní, pak se jedná o lokální minimum;
  - negativně definitní, pak se jedná o lokální maximum;
  - indefinitní, pak pak se jedná o sedlový bod.
- Pro určení (in)definitnosti Hessovy matice lze použít **Sylvestrovo kritérium**.
  - Pokud jsou všechny hlavní subdeterminanty $(H_f)_{\{1\}}, \ldots, (H_f)_{\{1,\ldots,n\}}$ kladné, pak je Hessova matice pozitivně definitní.
  - Pokud je první hlavní subdeterminant $(H_f)_{\{1\}}$ záporný, druhý $(H_f)_{\{1,2\}}$ kladný, třetí $(H_f)_{\{1,2,3\}}$ záporný atd., pak je Hessova matice negativně definitní.
  - Pokud je determinant Hessovy matice nenulový a nenastává ani jedna ze dvou možností výše, potom je Hessova matice indefinitní.
- **Pozor na to**, že výše uvedené pravidlo pro klasifikaci lze aplikovat pouze ve stacionárních bodech, tj. v bodech, které jsou podezřelé z lok. extrému. Pokud něco není vůbec podezřelé z extrému, tak nedává nejmenší smysl vyšetřovat, o jaký extrém se jedná! První tedy musíme určit stacionární body a ty poté klasifikovat.

Vázané extrémy

- Metoda **Lagrangeových multiplikátorů** nám dává nutnou podmínku pro existenci tzv. **vázaných extrémů**.
- Vázané extrémy jsou extrémy vázané vazební podmínkou (či podmínkami). Vazební podmínky jsou podmínky tvaru $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, kde g je nějaká („dostatečně pěkná“) funkce n proměnných.
- **Lagrangeova věta o multiplikátorech**": Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \ldots, g_k \in C^1(\Omega)$, kde $k < n$, a
$$M = \{\boldsymbol{x} \in \Omega, g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, g_k(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$
Předpokládejme, že $\boldsymbol{a} \in M$ je bod lokálního extrému f na M. Potom buď
(1) vektory $\nabla g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \nabla g_k(\boldsymbol{a})$ jsou lineárně závislé
nebo
(2) existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tak, že
$$\nabla f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

- Jedná se pouze o nutnou podmínku. Jinými slovy dostáváme pouze kandidáty. Pokud ale víme, že se maxima a minima na uvažované množině nabývá, tak stačí probrat všechny kandidáty a vybrat největší, resp. nejmenší hodnotu.
  - Užitečná skutečnost, která nám často zaručí existenci maxima a minima, je, že **každá spojitá funkce na omezené a uzavřené množině v $\mathbb{R}^n$ nabývá maxima i minima**.

Lagrangeova metoda pro jednu vazební podmínku:

Hledáme extrémy funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ na množině dané jednou vazební podmínkou

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{2}$$

(1) Nejprve zkontrolujeme, zda je $\operatorname{grad} g$ nenulový v bodech uvažované množiny. Pokud je v nějakém bodě nulový a tento bod leží v uvažované množině, pak tento bod přidáme na seznam bodů podezřelých z extrému.

(2) Uvážíme tzv. **Lagrangeovu funkci**

$$L(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo, jehož hodnotu neznáme.

(3) Sestavíme si soustavu rovnic, která odpovídá soustavě pro stacionární body funkce L, ke které přidáme vazební podmínku (2). Tj.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
g(x_1, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}$$

(4) Nyní potřebujeme získat všechna možná řešení této soustavy. To budou naši kandidáti.
- Že případný vázaný extrém splňuje tuto soustavu pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ je právě obsahem věty o Lagrangeových multiplikátorech.
- Hodnota čísla λ nás obecně nezajímá, takže pokud se nám povede získat kandidáta, aniž bychom věděli hodnotu λ, tak jsme spokojeni, a rozhodně ji nedopočítáváme.
- Musíme dávat pozor, aby kandidáti leželi v uvažované množině.

Lagrangeova metoda pro dvě vazební podmínky:

Hledáme extrémy funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ na množině dané dvěma vazebníma podmínkama

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{3}$$
$$g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{4}$$

(1) Nejprve zkontrolujeme, zda jsou vektory $\operatorname{grad} g_1$ a $\operatorname{grad} g_2$ lineárně nezávislý v bodech uvažované množiny. Pokud jsou v nějakém bodě lineárně závislý (tj. jeden z gradientů je nulový nebo je jeden nenulovým násobkem druhého) a tento bod leží v uvažované množině, pak tento bod přidáme na seznam bodů podezřelých z extrému.

(2) Uvážíme tzv. **Lagrangeovu funkci**

$$L(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_2 g_2(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ jsou nějaká čísla, jejichž hodnotu neznáme.

(3) Sestavíme si soustavu rovnic, která odpovídá soustavě pro stacionární body funkce L, ke které přidáme vazební podmínky (3) a (4). Tj.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Nyní potřebujeme získat všechna možná řešení této soustavy. To budou naši kandidáti.
- Že případný vázaný extrém splňuje tuto soustavu pro nějaká $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ je právě obsahem věty o Lagrangeových multiplikátorech.
- Hodnota čísel λ_1, λ_2 nás obecně nezajímá, takže pokud se nám povede získat kandidáta, aniž bychom věděli hodnotu λ_1 a/nebo λ_2, tak jsme spokojeni, a rozhodně ji nedopočítáváme.
- Musíme dávat pozor, aby kandidáti leželi v uvažované množině.

Extrémy funkcí

Zadání

1. Klasifikujte všechny stacionární body funkce f, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$;
   (b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)$;
   (c) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$;
   (d) $f(x,y) = y\cos x$;
   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;
   (f) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kde $x,y,z > 0$;

2. Rozhodněte, zda je funkce f konvexní, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$;
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + xy + yz$.

3. Je dána funkce $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.
   (a) Nalezněte největší otevřenou množinu C, na které je f konvexní.
   (b) Klasifikujte stacionární body funkce f.
   (c) Je bod $(1,0)$ bodem extrému funkce f na C, kde C je množina z bodu (a)? Pokud ano, jakým?

4. Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \alpha xy + y$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby funkce f byla konvexní.
   (b) Pro každou hodnotu parametru α z předchozího bodu nalezněte všechny body minima funkce f.

5. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2},3)$, $(0,2)$ a $\left(\frac{1}{2},1\right)$ graf funkce
   (a) $f(x) = ax + b$, kde $a,b \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$.

6. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ a $(2,5)$ graf funkce$f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a,b,c \in \mathbb{R}$.

7. Nalezněte všechny body v rovině $x + y + z = 1$, které jsou nejblíže bodu $(2,0,-3)$.

8. Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejblíže bodu $(4,2,0)$.

9. Nalezněte body minima a maxima funkce f na množině M, jestliže
   (a) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$;

(b) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$;

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2,0), (0,2), (0,-2)$;

10. Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovině $x + 2y + 3z = 6$.

11. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže

    (a) $f(x,y) = e^{-xy}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;

    (b) $f(x,y,z) = x + y + z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

12. Mezi body množiny

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}$$

    nalezněte všechny, které jsou nejblíže (resp. nejdále) od bodu $\boldsymbol{a} = (3,1,-1)$ a určete jejich vzdálenosti od $\boldsymbol{a}$.

13. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch o rovnicích $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a $x + 2z = 4$.

14. Nalezněte tři nezáporná čísla, jejichž součet je 300 a součin je maximální.

15. Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $x - y - 1 = 0$.

Výsledky

1. (a) $(0,1)$, $(-1,-1)$ a $(1,-1)$ jsou sedlové body; $(-1,1)$ a $(1,1)$ jsou body ostrého lokálního minima; $(0,-1)$ je bod lokálního maxima.
   (b) $(0,0)$ je bod lokálního maxima; každý prvek v $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ je bodem lokálního minima (dokonce bodem minima).
   (c) Funkce nemá stacionární body. (Ale bod $(0,0)$ je bod maxima funkce f.)
   (d) Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$ sedlový bod.
   (e) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ je bod lokálního minima.
   (f) $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ je bod lokálního minima.
2. (a) Není konvexní.
   (b) Je konvexní.
3. (a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
   (b) $(1,0)$ je bod lokálního minima a $(-1,0)$ je sedlový bod.
   (c) Jedná se o bod minima funkce f na C.
4. (a) f je konvexní pro $\alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.
   (b) Pro každé $\alpha \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ má f jediný bod minima, a to $\left(\frac{\alpha}{8-\alpha^2}, \frac{-2}{8-\alpha^2}\right)$. Pro $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ bod minima neexistuje.
5. (a) $a = \frac{2}{5}, b = \frac{8}{5}$.
   (b) $a = -1, b = 1$.
6. $a = \frac{3}{7}, b = \frac{6}{5}, c = \frac{26}{35}$.
7. $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.
8. $\left(2, 1, \sqrt{5}\right)$, $\left(2, 1, -\sqrt{5}\right)$.
9. (a) $(-1,0)$ je bod minima a $(1,0)$ je bod maxima.
   (b) $(1,\sqrt{2})$ je bod maxima a všechny prvky množiny
   $$\left\{(x,0) \,\middle|\, 0 \le x \le \sqrt{3}\right\} \cup \left\{(0,y) \,\middle|\, 0 \le y \le \sqrt{3}\right\}$$
   jsou body minima.
   (c) $(1,0)$ je bod minima; $(0,-2)$ a $(0,2)$ jsou body maxima.
10. $\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$.
11. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ jsou body minima; $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ jsou body maxima.
    (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ je bod minima a $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ je bod maxima.

12. Nejblíže je bod $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 - \frac{44}{\sqrt{11}}} = \sqrt{11} - 2$. Nejdále je bod $(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 + \frac{44}{\sqrt{11}}} = \sqrt{11} + 2$.

13. $(-4, 0, 4)$.

14. $x = y = z = 100$.

15. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.