Cvičení 1 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 1

Úloha 1. *Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla z. Dále určete velikost z.*

(a) $z = (3-i)^2 + \frac{1+i^{11}}{1+i}$
(b) $z = \frac{i^{12}}{(1+2i)^2}$

Úloha 2. *Určete $r > 0$ a (nějaké) $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, kde*

(a) $z = -2 + i$;
(b) $z = -1 + 3i^{43}$;
(c) $z = \frac{i^{31}}{2-i}$.

Úloha 3. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo z. Přibližně ho zakreslete do komplexní roviny. Dále určete hlavní hodnotu argumentu čísla z.*

(a) $z = 5\big(\cos(-\frac{399}{200}\pi) + i\sin(-\frac{399}{200}\pi)\big)$;
(b) $z = (-3-3i)e^{\frac{\pi}{3}i}$;
(c) $z = (5-5i)^{11}$.

Úloha 4. *Nechť $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ a $\psi \in \operatorname{Arg} w$. Dokažte*[1]*, že $z = w$ tehdy a jen tehdy, když $|z| = |w|$ a $\varphi = \psi + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.*

Úloha 5. *Nalezněte všechna řešení následujících binomických rovnic.*

(a) $z^4 = 81i$
(b) $z^5 = 1$
(c) $z^2 - 2 - 2i = 0$

Pro nudící se

Úloha 6. *O čísle $z \in \mathbb{C}$ víme, že leží na přímce $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ a jeho velikost je 4. Najděte algebraický tvar čísla $(-4+4i)z$.*

Úloha 7. *Pro dané $n \in \mathbb{N}$ nalezněte všechna řešení rovnice $z^n = \bar{z}$.*

Úloha 8. *Popište geometricky množinu všech $z \in \mathbb{C}$ splňujících*

(a) $|z+1| = 2$;
(b) $|z-1| < 1$ *a* $|z| = |z-2|$;
(c) $|z|^2 > z + \bar{z}$;
(d) $\operatorname{Re} z = |z-2|$.

[1] Alespoň přesvědčivým obrázkem.

Komplexní čísla, úvod

Připomenutí.

- *Mějme* $z = x + yi$, *kde* $x, y \in \mathbb{R}$. x *je* **reálná část** *čísla* z, y *je* **imaginární část** *čísla* z. *Píšeme* $\operatorname{Re} z = x$ *a* $\operatorname{Im} z = y$. <u>*Reálná i imaginární část jsou reálná čísla.*</u> *Geometricky je* z *bod v rovinně o souřadnicích* (x, y).
- **Velikost** *komplexního čísla* $z = x + yi$ *je* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Komplexně sdružené** *číslo k číslu* $z = x + yi$ *je číslo* $\bar{z} = x - yi$.
- *Platí* $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.
- **Goniometrický tvar** *komplexního čísla* $z \neq 0$ *je vyjádření*
  $$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
  kde $\varphi \in \mathbb{R}$. *Píšeme* $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. *Označíme-li pro* $\varphi \in \mathbb{R}$
  $$(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi},$$
  pak můžeme psát stručněji
  $$z = |z|e^{i\varphi}.$$
  To budeme nazývat **exponenciální tvar** *kompexního čísla* $z \neq 0$. *Goniometrický/Exponenciální tvar není jednoznačný (je-li* $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, *pak také* $\varphi + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z$ *pro každé* $k \in \mathbb{Z}$*). Je-li navíc* $\varphi \in (-\pi, \pi]$, *říkáme, že* φ *je* **hlavní hodnota argumentu** *čísla* z, *a píšeme* $\arg z = \varphi$.
- **Moivreova věta** *říká, že pro každé* $n \in \mathbb{Z}$ *a* $\varphi \in \mathbb{R}$ *platí*
  $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$
  Stručněji:
  $$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$
- **Binomické rovnice** *jsou rovnice tvaru*
  $$z^n = w,$$
  kde $n \in \mathbb{N}$ *a* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *jsou dána. Binomická rovnice má* <u>*právě* n *různých řešení*</u> *(v komplexním oboru). Geometricky řešení binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného* n*-úhelníku.*

Výsledky

Úloha 1: (a) $\operatorname{Re} z = 8$, $\operatorname{Im} z = -7$, $|z| = \sqrt{113}$

(b) $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{4}{25}$, $|z| = \frac{1}{5}$

Úloha 2: (a) $r = |z| = \sqrt{5}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)

(b) $r = |z| = \sqrt{10}$, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} 3$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)

(c) $r = |z| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\varphi = -\operatorname{arctg} 2$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)

Úloha 3: (a) $|z| = 5$, 1. kvadrant, $\arg z = \frac{1}{200}\pi$

(b) $|z| = \sqrt{18}$, 4. kvadrant, $\arg z = -\frac{5}{12}\pi$

(c) $|z| = \left(\sqrt{50}\right)^{11}$, 3. kvadrant, $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$

Úloha 5: (a) $z_k = 3e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$

(b) $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

(c) $z_k = \sqrt[4]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)}$, $k = 0, 1$

Úloha 6: $(-4 + 4i)z = -4\sqrt{32}$

Úloha 7: Pro $n = 1$ je řešení libovolné $z \in \mathbb{R}$; pro $n > 1$ je řešení $z = 0$ a také $z_m = \cos\varphi_m + i \sin\varphi_m$, kde $\varphi_m = \frac{2m\pi}{n+1}$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Úloha 8: (a) Kružnice o středu -1 a poloměru 2.

(b) Úsečka bez krajních bodů $1 + i$ a $1 - i$.

(c) Množina bodů ležících vně kružnice o středu 1 a poloměru 1.

(d) Parabola o rovnici $4(x - 1) = y^2$.