Cvičení 2 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 2

Úloha 1. *Určete reálnou* $u(x,y)$ *a imaginární část* $v(x,y)$ *funkce* $f(z)$, $z = x+iy$, *kde*
(a) $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{i\bar{z}}$;
(b) $f(z) = |z+i|^2 + e^{z-\bar{z}}$.

Úloha 2. *Určete všechny body, kde je funkce*

$$f(z) = i\,(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2\,,\ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná, a v těchto bodech určete $f'(z)$.

Úloha 3. *Rozhodněte, zda je funkce*

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + i(z+\bar{z})^2 + 2i\operatorname{Im} z,\ z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 1+4i$. *Pokud ano, určete* $f'(1+4i)$.

Úloha 4. *Pro jaké hodnoty parametrů* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *je funkce*

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x),\ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $1+3i$. *Pro tyto hodnoty parametrů určete* $f'(1+3i)$.

Úloha 5. *Rozhodněte, zda je reálná část funkce*

$$f(z) = \left(\operatorname{Im}(z^2)\right)^3 + i\bar{z},\ z \in \mathbb{C},$$

harmonická funkce.

Úloha 6. *Nalezněte všechny hodnoty parametrů* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tak, aby funkce*

$$u(x,y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x^2 y + \beta y^3,\ x,y \in \mathbb{R},$$

byla harmonická.

Pro nudící se

Úloha 7. *Pro jaké hodnoty parametrů* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *je funkce*

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5y + \beta x),\ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$? *Pro tyto hodnoty parametrů určete* $f'(z)$ *na této přímce.*

Úloha 8.
Je dána funkce

$$f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2),\ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů* α, β *tak, aby* $f(z)$ *byla*
(a) diferencovatelná na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$;
(b) celistvá.

Úloha 9. *Je dána funkce*

$$u(x,y) = x^n - y^n + e^{\alpha y}\sin(4x) - 2y,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů* $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tak, aby* $u(x,y)$ *byla harmonická funkce na* $\mathbb{R}^2$.

Funkce komplexní proměnné, Cauchyovy-Riemannovy podmínky, harmonické funkce

Připomenutí.

- *Je-li $z = x + iy$ a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde u, v jsou reálné funkce, pak $u = \operatorname{Re} f$ (***reálná část funkce** *f) a $v = \operatorname{Im} f$ (***imaginární část funkce** *f).*
- *Mějme funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ takovou, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají spojité parciální derivace. Potom $f'(z)$ existuje právě tehdy, když jsou splněny* **Cauchyovy-Riemannovy podmínky***:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

V takovém případě platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

- *Funkce $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je* **harmonická***, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, jestliže má spojité druhé parc. derivace a platí*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Podstatné je, že součet $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ je nulový v každém bodě *množiny Ω. Tj. neřešíme, pro jaké body $(x, y) \in \Omega$ je součet nulová, ale* zda je nulový vždy nezávisle na $(x, y) \in \Omega$. *V našich příkladech bude typicky $\Omega = \mathbb{R}^2$.*

Výsledky

Úloha 1: (a) $u(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

(b) $u(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + \cos 2y$, $v(x,y) = \sin 2y$

Úloha 2: Funkce je diferencovatelná v bodech splňující $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, tj. na přímce $x = y$. V těchto bodech platí $f'(z) = 2xi = 2i \operatorname{Re} z$.

Úloha 3: Ano, je. Máme $f'(1+4i) = 2+8i$.

Úloha 4: $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f'(1+3i) = 1+i$

Úloha 5: Není harmonická.

Úloha 6: $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ a zároveň $\beta = -\frac{1}{3}$

Úloha 7: Funkce je diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ právě tehdy, když $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Pro tyto hodnoty parametrů platí v bodech na přímce $f'(z) = 2x - 1 + i = 2\operatorname{Re} z - 1 + i$.

Úloha 8: (a) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 3$.

(b) $\alpha = \beta = 3$.

Úloha 9: $n = 0, 1, 2$ a $\alpha = \pm 4$.