Cvičení 3 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 3

Úloha 1. *Mějme funkci*

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 4xy + 3x - y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že:*

(a) funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá;*
(b) funkce $f(z)$ *jako výše je celistvá a navíc* $f(i) = -2 + 4i$.

Úloha 2. *Mějme funkci*

$$u(x,y) = e^{2x}\cos(2y) + x^3 - 3xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že:*

(a) funkce $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá;*
(b) funkce $f(z)$ *jako výše je celistvá a navíc* $f(1 + i\pi) = 1 + e^2 - 3\pi^2 + 3\pi i$.

Úloha 3. *Dokažte, že pro každé* $z, w \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{Z}$ *platí*

(a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$;
(b) $e^z \neq 0$;
(c) $e^z = e^w$ *právě tehdy, když* $z = w + 2k\pi i$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$;
(d) $(e^z)^n = e^{nz}$.

Úloha 4. *Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo* $z = e^{4 - \frac{301}{200}\pi i}$.

Úloha 5. *Vyjádřete funkci* $\sin(-5iz^3)$ *pomocí exponenciální funkce.*

Úloha 6. *Určete reálnou a imaginární část čísla* z*, je-li*

(a) $z = e^{(2-3i)^2}$;
(b) $z = \ln(-2 - 2i)$;
(c) $z = \cos(\pi + i\ln 2)$.

Úloha 7. *Nalezněte všechna řešení následujících rovnic.*

(a) $e^{6i+3iz} + 6 = 0$
(b) $\left(\overline{e^z}\right)^2 = i$

Pro nudící se

Úloha 8. *Mějme funkci*

$$v(x,y) = -\cosh x \cos y - 2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $u(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *takové, že funkce* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je celistvá a platí* $f(i\pi) = -i$.

[Připomenutí: Platí $(\sinh)' = \cosh$ *a* $(\cosh)' = \sinh$*.]*

Úloha 9. *Nalezněte všechna řešení následujících rovnic.*

(a) $\cos z = 4$
(b) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$
(c) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$

Úloha 10. *Dokažte, že je-li funkce* $f(z) = u(x) + iv(y)$ *celistvá, potom* $f(z)$ *je nutně polynom stupně nejvýše jedna.*

[Nápověda: Podstatné je, že funkce $u(x,y) = u(x)$ *závisí pouze na* $\operatorname{Re} z$ *a funkce* $v(x,y) = v(y)$ *závisí pouze na* $\operatorname{Im} z$*. Využijte toho, že reálná a imaginární část celistvé funkce jsou harmonické funkce na* $\mathbb{R}^2$*.]*

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Připomenutí.

- *Je-li* $z = x + iy$ *a* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$*, kde* u, v *jsou reálné funkce, pak* $u = \mathrm{Re}\, f$ *(***reálná část funkce** f*) a* $v = \mathrm{Im}\, f$ *(***imaginární část funkce** f*).*
- *Mějme funkci* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *takovou, že funkce* $u(x, y)$ *a* $v(x, y)$ *mají spojité parciální derivace. Potom* $f'(z)$ *existuje právě tehdy, když jsou splněny* **Cauchyovy-Riemannovy podmínky***:*
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$
a
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$
V takovém případě platí
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Elementární funkce

Připomenutí.

- *Pro* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *definujeme*
$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
- *Pro* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *definujeme* hlavní hodnotu logaritmu
$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$
- *Pro každé* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *platí* $e^{\ln z} = z$.
- *Pozor, v opačném pořadí to obecně neplatí. Tj.* obecně není pravda $\ln e^z = z$.
- $e^z = e^w$ *právě tehdy, když* $z = w + 2k\pi i$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$

Výsledky

Úloha 1: (a) $v(x,y) = 2xy - 2y^2 + 3y + 2x^2 + x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = 3$

Úloha 2: (a) $v(x,y) = e^{2x}\sin(2y) + 3x^2y - y^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = \pi^3$

Úloha 4: $|z| = e^4$, z leží v 1. kvadrantu

Úloha 5: $\sin(-5iz^3) = \frac{e^{5z^3} - 5^{-5z^3}}{2i}$

Úloha 6: (a) $\operatorname{Re} z = e^{-5}\cos 12$, $\operatorname{Im} z = -e^{-5}\sin 12$
(b) $\operatorname{Re} z = \ln\sqrt{8}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3\pi}{4}$
(c) $\operatorname{Re} z = -\frac{5}{4}$, $\operatorname{Im} z = 0$

Úloha 7: (a) $z_k = -2 + \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} - \frac{\ln 6}{3}i$, kde $k \in \mathbb{Z}$
(b) $z_k = -\frac{\pi}{4}i - k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Úloha 8: $u(x,y) = \sinh x \sin y$

Úloha 9: (a) $z_k = -i\ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$
(b) $z_k = \pm\frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$
(c) $z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$; ekvivalentně (např.) $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ a $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}$