Cvičení 4 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 4 a část 5

Úloha 1. *Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady na jejím kruhu konvergence a určete jeho parametry.*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+i)^{2n+1}$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!4^{n+1}} z^{3n+2}$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n+3}$
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{2^{n+1}} z^{n+5}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^{n+1}} z^{n+3}$
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(2n+2)} z^{2n+5}$

Úloha 2.

(a) *Víme, že mocninná řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+3)^n$$

má poloměr konvergence $R = 6$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 4$?

(b) *Víme, že mocninná řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2i)^n$$

má poloměr konvergence $R = 4$. Konverguje tato mocninná řada v bodě $z = 2+3i$?

Úloha 3. *Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.*

(a) $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$, $z_0 = 3$
(b) $f(z) = \frac{1}{(z+6)^2}$, $z_0 = -4$
(c) $f(z) = (z-2)^4 e^{3z}$, $z_0 = 2$
(d) $f(z) = \frac{(z+1)^5}{z^2+z-2}$, $z_0 = -1$

Pro nudící se

Úloha 4. *Nalezněte součet $f(z)$ mocninné řady na jejím kruhu konvergence a určete jeho parametry.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n} z^n$

Úloha 5. *O mocninné řadě se středem $z_0 = i$ víme, že konverguje v bodech 0, $-i$ a $\frac{5}{2}i$. Dále víme, že nekonverguje v bodech $3i$, $4+2i$ a $-2i$. Jaký je její poloměr konvergence?*

Úloha 6. *Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.*

(a) $f(z) = z^2$, $z_0 = 1$
(b) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$, $z_0 = i$
(c) $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$, $z_0 = 1$

Mocninné řady

Připomenutí.

- **Mocninná řada** *je řada tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

  kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je daná číselná posloupnost (tzv.* **koeficienty mocninné řady***),* z *je proměnná a* z_0 *je pevné dané číslo (tzv.* **střed mocninné řady***).*
  - ⋆ *Pro každou mocninnou řadu existuje (právě jedno)* $R \in [0, \infty]$ *takové, že řada absolutně konverguje na otevřeném kruhu se středem v* z_0 *a poloměru* R*, a diverguje na množině* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| > R\}$*. Toto* R *se nazývá* **poloměr konvergence mocninné řady***. Otevřený kruh se středem* z_0 *a poloměru* R *se nazývá* **kruh konvergence mocninné řady***.*
  - ⋆ $R = \infty$ *znamená, že kruh konvergence je celá komplexní rovina. Pokud je* $R = 0$*, tak je tento otevřený kruh vlastně prázdná množina. Případ* $R = 0$ *nastat může, ale takové mocninné řady jsou pro nás nezajímavé, protože s nimi nejde nic moc dále dělat.*
  - ⋆ *Mocninná řada* neobsahuje záporné mocniny $(z - z_0)$.
- *Pro určení součtů mocninných řad* je třeba znát *některé známé součty, zejména:*
  - ⋆ $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *pro* $|z| < 1$ *(geometrická řada)*
  - ⋆ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ *pro libovolné* $z \in \mathbb{C}$ *(rozvoj exponenciály)*
- *Mocninnou řadu (s kladným poloměrem konvergence) lze na jejím kruhu konvergence* derivovat a integrovat člen po členu*. Výsledkem je zase mocninná řada, která má stejný kruh konvergence. Na kruhu konvergence platí:*
  - ⋆ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$
  - ⋆ $\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\right) \mathrm{d}z \overset{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$
- *Jednoduché parciální zlomky (tj. s lineárním polynomem ve jmenovateli) rozvíjíme pomocí známého součtu geometrické řady.*
- *Správný střed si vyrobíme přepsáním* $z = (z - z_0) + z_0$*.*
- *Parciální zlomky odpovídající vyšší násobnosti kořene převedeme pomocí integrování na jednoduché, které umím rozvinout. Následně derivujeme, abychom získali požadovaný rozvoj.*

Výsledky

Úloha 1: (a) $\frac{z+i}{1-3(z+i)^2}$ pro $|z+i| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($z_0 = -i$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

(b) $\frac{z^2}{4} e^{-\frac{z^3}{4}}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ ($z_0 = 0$, $R = \infty$)

(c) $z^3 e^{z^2}(2z^2+1)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ ($z_0 = 0$, $R = \infty$)

(d) $\frac{z^6+4z^5}{(z+2)^2}$ pro $|z| < 2$ ($z_0 = 0$, $R = 2$)

(e) $z^2(\ln(z+5) - \ln 5)$ pro $|z| < 5$ ($z_0 = 0$, $R = 5$)

(f) $\frac{z^3}{4}(e^{2z^2} - 1)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ ($z_0 = 0$, $R = \infty$)

Úloha 2: (a) Nekonverguje.

(b) Konverguje.

Úloha 3: (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(-5)^{n+1}}(z-3)^{n+1}$ pro $|z-3| < \frac{5}{2}$ (tj. $R = \frac{5}{2}$)

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n(z+4)^{n-1}$ pro $|z+4| < 2$ (tj. $R = 2$)

(c) $f(z) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2)^{n+4}}{n!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $R = \infty$)

(d) $f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^{n+5} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+5}}{2^{n+1}}$ pro $|z+1| < 1$ (tj. $R = 1$)

Úloha 4: (a) $\frac{2z}{(1-z)^3}$ pro $|z| < 1$ ($z_0 = 0$, $R = 1$)

(b) $\ln(2+z) - \ln 2$ pro $|z| < 2$ ($z_0 = 0$, $R = 2$)

Úloha 5: Poloměr konvergence je 2.

Úloha 6: (a) $f(z) = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$ pro $z \in \mathbb{C}$

(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(i^{n-1} + \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-i)^n$ pro $|z-i| < 1$ (tj. $R = 1$)

(c) $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$ (tj. $R = 3$)