Cvičení 5 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 5

Úloha 1. *Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.*
(a) $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$, $z_0 = 3$
(b) $f(z) = \frac{1}{(z+6)^2}$, $z_0 = -4$
(c) $f(z) = (z-2)^4 e^{3z}$, $z_0 = 2$
(d) $f(z) = \frac{(z+1)^5}{z^2+z-2}$, $z_0 = -1$

Úloha 2.
(a) *Laurentova řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+4)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = 3$ a vnější $R = 9$. Konverguje v bodě $z = -6$?
(b) *Laurentova řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = 1$ a vnější $R = 4$. Konverguje v bodě $z = 2$?

Úloha 3. *Rozviňte funkci*

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)^4(z^2+2z-15)^2}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovým okolí bodu $z_0 = 3$ a určete jeho parametry.

Úloha 4. *Klasifikujte typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z, je-li*
(a) $z = -2$ *a*

$$f(z) = -\frac{9}{(z+2)^5} + \frac{8}{(z+2)^3} - \frac{3}{(z+2)^2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2 (z+2)^{3n+4}, \ z \in P(-2);$$

(b) $z = i$ *a*

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}, \ z \in P(i).$$

Úloha 5. *Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce*

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \ z \in P(1),$$

měla v bodě 1 jednoduchý pól.

Pro nudící se

Úloha 6. *Rozviňte funkci $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ do mocninné řady se středem v 1 a určete parametry jejího kruhu konvergence.*

Úloha 7. *Rozviňte funkci $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ do Laurentovy řady na co největším prstencovým okolí bodu 1 a určete jeho parametry. Dále klasifikujte typ izolované singularity funkce v bodě 1.*

Úloha 8. *O funkci $f(z)$ víme, že má v bodě i pól řádu 1. Dále o ní víme, že splňuje $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ a $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$, $z \in P(i)$, v bodě i.*

Mocninné řady

Připomenutí.

- **Mocninná řada** *je řada tvaru*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je daná číselná posloupnost (tzv.* **koeficienty mocninné řady***),* z *je proměnná a* z_0 *je pevné dané číslo (tzv.* **střed mocninné řady***).*
  - ⋆ *Pro každou mocninnou řadu existuje (právě jedno)* $R \in [0, \infty]$ *takové, že řada absolutně konverguje na otevřeném kruhu se středem v* z_0 *a poloměru* R*, a diverguje na množině* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| > R\}$*. Toto* R *se nazývá* **poloměr konvergence mocninné řady***. Otevřený kruh se středem* z_0 *a poloměru* R *se nazývá* **kruh konvergence mocninné řady***.*
  - ⋆ $R = \infty$ *znamená, že kruh konvergence je celá komplexní rovina. Pokud je* $R = 0$*, tak je tento otevřený kruh vlastně prázdná množina. Případ* $R = 0$ *nastat může, ale takové mocninné řady jsou pro nás nezajímavé, protože s nimi nejde nic moc dále dělat.*
  - ⋆ *Mocninná řada* NEobsahuje *záporné mocniny* $(z - z_0)$.
- *Známé součty/rozvoje, které bychom měli bezpečně znát:*
  - ⋆ *(geometrická řada:)* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ *pro* $|z| < 1$*;*
  - ⋆ *(rozvoj exponenciály:)* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *pro libovolné* $z \in \mathbb{C}$.
- *Jednoduché parciální zlomky (tj. s lineárním polynomem ve jmenovateli) rozvíjíme pomocí známého součtu geometrické řady.*
- *Správný střed si vyrobíme přepsáním* $z = (z - z_0) + z_0$.
- *Parciální zlomky odpovídající vyšší násobnosti kořene převedeme na jednoduché, které umím rozvinout, pomocí integrování. Následně derivujeme, abychom získali požadovaný rozvoj.*

Laurentovy řady

Připomenutí.

- **Laurentova řada** *je řada tvaru*
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
kde $\{a_n\}_{n=\infty}^{\infty}$ *je daná číselná posloupnost (tzv.* **koeficienty Laurentovy řady***),* z *je proměnná a* z_0 *je pevné dané číslo (tzv.* **střed Laurentovy řady***).*
- *Narozdíl od mocninných řad Laurentova řada obsahuje i záporné mocniny* $(z - z_0)$.
- *Laurentovy řady konvergují na mezikružích.*
  - ⋆ $P(z_0; r; R)$*, kde* z_0 *je střed,* r *je* vnitřní poloměr *a* R *je* vnější poloměr.
  - ⋆ *Speciálně* $P(z_0; 0; R)$ *je prstencové okolí bodu* z_0*, tj. otevřený kruh se středem v* z_0 *a poloměru* R *bez svého středu.*

- *Při rozvoji racionální funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu* $z_0 \in \mathbb{C}$ *postupujeme stejně jako u mocninných řad.*

Klasifikace izolovaných singularit (pomocí Laurentova rozvoje)

Připomenutí.

- *Nechť* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *je Laurentův rozvoj funkce* f *na prstencovém okolí izolované singularity* $z_0 \in \mathbb{C}$*. Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.*
  - *(1) Pokud* $a_n = 0$ *pro každé* $n < 0$*, pak* z_0 *je* **odstranitelná singularita***.*
    - ⋆ $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$ *na prstencovém okolí* z_0
  - *(2) Pokud* $a_{-k} \neq 0$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_n = 0$ *pro každé* $n < -k$*, pak* z_0 *je* **pól řádu** k*.*
    - ⋆ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$ *na prstencovém okolí* z_0*, kde* $a_{-k} \neq 0$
  - *(3) Pokud* $a_n \neq 0$ *pro nekonečně mnoho* $n < 0$*, pak* z_0 *je* **podstatná singularita***.*
- *Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.*

Výsledky

Úloha 1: (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(-5)^{n+1}}(z-3)^{n+1}$ pro $|z-3| < \frac{5}{2}$ (tj. $R = \frac{5}{2}$)

(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n(z+4)^{n-1}$ pro $|z+4| < 2$ (tj. $R = 2$)

(c) $f(z) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2)^{n+4}}{n!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $R = \infty$)

(d) $f(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z+1)^{n+5} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+5}}{2^{n+1}}$ pro $|z+1| < 1$ (tj. $R = 1$)

Úloha 2: (a) Ne.

(b) Ano.

Úloha 3: $f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^{n+1}} n(n-1)(z-3)^{n-8}$ pro $0 < |z-3| < 8$ (tj. $r = 0$ a $R = 8$)

Úloha 4: (a) Pól řádu 3.

(b) Odstranitelná singularita.

Úloha 5: $k = 2$, $a = -\frac{8}{3}$

Úloha 6: $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}(z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$ (tj. $R = 3$)

Úloha 7: $f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}e^2}{(n+3)!}(z-1)^n$ pro $0 < |z-1| < \infty$ (tj. $r = 0$ a $R = \infty$); pól řádu 3

Úloha 8: Odstranitelná singularita.