Cvičení 7 – Komplexní analýza 2024/2025
Týden 7

Úloha 1. *Spočtěte.*

(a) $\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(b) $\operatorname{res}_{0} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$
(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$
(d) $\operatorname{res}_{0} \frac{\sin z}{e^z-1-z}$
(e) $\operatorname{res}_{0} \frac{z^2}{1-\cos z}$

Úloha 2. *Spočtěte.*

(a)

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-5)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-4|=2$.

(b)

$$\int_C \frac{1}{z\sin z} + \frac{e^{\sin z}}{z+3}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2, $\frac{3\pi}{2}+2i$, $\frac{3\pi}{2}-2i$.

(c)

$$\int_C \frac{1}{e^z-1} + \frac{z-\frac{\pi}{2}}{(\cos z)^2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $\frac{\pi}{4}+i$, $\frac{\pi}{4}-i$, $\pi+i$, $\pi-i$.

(d)

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}} + \sin\left(\frac{1}{z-10}\right)\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

Úloha 3. *Určete, čemu se rovná*

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Týden 8:

Úloha 4. *Spočtěte.*

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$
(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

Reziduum

Připomenutí.

(1) *Nechť* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je Laurentův rozvoj funkce* f *na prstencovém okolí izolované singularity* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Koeficient* a_{-1} *(tj. koeficient u* $(z-z_0)^{-1}$*) nazýváme* **reziduem** *funkce* f *v bodě* z_0 *a značíme* $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.

(2) *Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.*

(3) *Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.*

- **Má-li** $f(z)$ **v bodě** z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, *potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

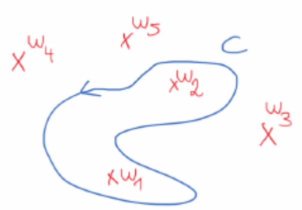
  Speciálně pro
  - ⋆ $k = 1$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$;
  - ⋆ $k = 2$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big((z-z_0)^2 f(z)\big)'$.
- *Je-li funkce* f *tvaru* $f = \frac{g}{h}$, *kde* g *je holomorfní na okolí* z_0 *a* h **má v bodě** z_0 **jednonásobný kořen**, *potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- *Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“, nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...*

Reziduová věta

Připomenutí.



$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{w_1} f(z) + \operatorname{res}_{w_2} f(z)\right)$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x$

Připomenutí.

- *Nechť* P, Q *jsou nenulové polynomy,* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Nechť* $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$ *(pokud* $\alpha = 0$, *tak* $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$*) a* Q *nemá žádné reálné kořeny. Potom*
  (a) *pokud* $\alpha \geq 0$, *pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

  kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\};$$

  (b) *pokud* $\alpha < 0$, *pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

  kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}.$$