

Cvičení 8 – Komplexní analýza 2025/2026

Úloha 1. Spočtete.

(a)

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-5)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-4|=2$.

(b)

$$\int_C \frac{1}{z \sin z} + \frac{e^{\sin z}}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2 , $\frac{3\pi}{2} + 2i$, $\frac{3\pi}{2} - 2i$.

(c)

$$\int_C \frac{1}{e^z - 1} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{(\cos z)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $\frac{\pi}{4} + i$, $\frac{\pi}{4} - i$, $\pi + i$, $\pi - i$.

Úloha 2. Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Úloha 3. Spočtete.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-2x+2)^2} dx$

Pro nudící se

Úloha 4. O funkcích $f_1(z)$, $f_2(z)$ a $f_3(z)$ víme, že mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ jednoduchý pól a platí $\operatorname{res}_{z_0} f_1(z) = 2$, $\operatorname{res}_{z_0} f_2(z) = -1$ a $\operatorname{res}_{z_0} f_3(z) = -2$. Určete, jaký typ izolované singularity mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ funkce $g(z) = f_1(z) + f_2(z)$ a $h(z) = f_1(z) + f_3(z)$.

Úloha 5. Spočtete

$$\int_C e^{\frac{4}{z-2}} + \sin\left(\frac{1}{z-10}\right) dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

Úloha 6. Víme, že

$$\int_{L_1} f(z) dz = 5 \quad a \quad \int_{L_2} f(z) dz = -3,$$

kde $f(z)$ je celistvá funkce, L_1 je úsečka s počátečním bodem -2 a koncovým i a L_2 je úsečka s počátečním bodem i a koncovým 2 . Určete

$$\int_C f(z) dz,$$

kde C je záporně orientovaná polokružnice se středem v 0 , poloměru 2 a počátečním bodem 2 .

Reziduum

Připomenutí.

- (1) Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} (tj. koeficient u $(z-z_0)^{-1}$) nazýváme **reziduem** funkce f v bodě z_0 a značíme $\text{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.
- (2) Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.
- (3) Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.

- Má-li $f(z)$ v bodě z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Speciálně pro

$$\star k=1: \text{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z);$$

$$\star k=2: \text{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z-z_0)^2 f(z))'.$$

- Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 **jednonásobný kořen**, potom

$$\text{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“, nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...

Reziduová věta

Připomenutí.



$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{res}_{w_1} f(z) + \text{res}_{w_2} f(z))$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$

Připomenutí.

- Nechť P, Q jsou nenulové polynomy, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť $\text{st } Q \geq \text{st } P + 1$ (pokud $\alpha = 0$, tak $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$) a Q nemá žádné reálné kořeny. Potom

- (a) **pokud $\alpha \geq 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\};$$

- (b) **pokud $\alpha < 0$** , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}.$$