

Cvičení 9–10 – Komplexní analýza 2025/2026

Úloha 1. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \mathbb{1}(t+4) - \mathbb{1}(t-2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t \in [-4, 2), \\ 0 & \text{pokud } t \in \mathbb{R} \setminus [-4, 2), \end{cases}$$

kde $\mathbb{1}$ je Heavisideova funkce definovaná jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$$

Úloha 2. Za pomoci Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete následující Fourierovy obrazy.

- (a) $\mathcal{F}[h(4t+5)](\omega)$
- (b) $\mathcal{F}[e^{5it}h(t-2)](\omega)$
- (c) $\mathcal{F}[h''(t)](\omega)$
- (d) $\mathcal{F}[\sin(3t)h'(t+4)](\omega)$

Úloha 3. Určete následující Fourierovy transformace.

- (a) $\mathcal{F}[te^{-9t^2}](\omega)$
- (b) $\mathcal{F}[e^{-4(2t-3)^2}](\omega)$

Úloha 4. Nalezněte Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení diferenciální rovnice

$$y'''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

[Využijte faktu, že $\mathcal{F}[\frac{1}{1+t^2}](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$.]

Úloha 5. Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, víte-li že její Fourierův obraz je

- (a) $\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2\omega + 5}$;
- (b) $\hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega - 2i)^2(\omega + i)}$.

Úloha 6. Pomocí Fourierovy transformace „dostatečně pěkné“ funkce $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$ vyjádřete

$$\mathcal{F}[(te^{-\frac{(3t+2)^2}{2}}) * (e^{-2it}h'''(t))](\omega).$$

Úloha 7. Nalezněte Fourierův obraz $\hat{y}(\omega)$ řešení integrodiferenciální rovnice

$$y''(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} y(t-\tau) d\tau = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

[Využijte faktu, že $\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.]

Úloha 8. Určete spojitou funkci $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, víte-li, že

(a)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 16} \quad a \quad \widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{(\omega - 4i)^2(\omega + 4i)(\omega + 2i)}.$$

(b)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 2i\omega - 1} \quad a \quad \widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{(\omega - i)^4}.$$

Pro nudící se

Úloha 9. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$, kde $a > 0$.

[Fourierovu transformaci počítejte z definice.]

Úloha 10. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t).$$

Úloha 11. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení integrální rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau = e^{-t^2}.$$

Fourierova transformace

Připomenutí.

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (\text{Fourierova transformace funkce } f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$$

$$\check{f}(\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (\text{inverzní Fourierova transformace funkce } f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$$

- $\hat{f}(\omega) = 2\pi \check{f}(-\omega)$
- Pro hezké funkce platí $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f(t)]) = f(t)$ (věta o inverzi).

• Základní aritmetika Fourierovy transformace:

★ $\mathcal{F}$ je lineární.

★ Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[f(t-a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f(t)](\omega)$.

★ Pro $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - a)$.

★ Pro $a \in \mathbb{R}$ nenulové: $\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)](\frac{\omega}{a})$.

[posun vzoru]
[posun obrazu]
[škálování]

• Obraz Gaussovy funkce:

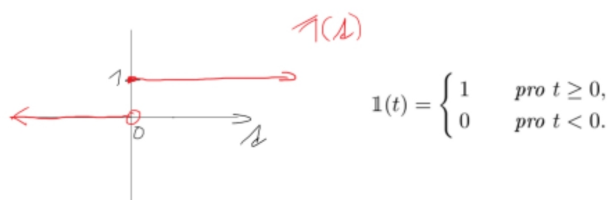
$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ je parametr.}$$

• Vztah Fourierovy transformace a derivace pro pěkné funkce:

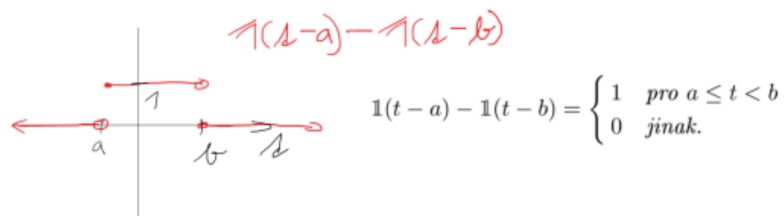
$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (\text{obraz derivace})$$

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (\text{derivace obrazu}).$$

• Heavisideova funkce:



• Pro $a < b$ jest



• Konvoluce dvou pěkných funkcí $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ je funkce $(f * g)(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná jako

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

• Fourierova transformace konvoluce:

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)](\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$