

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 1

Úloha 1. *Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla*

$$z = \frac{6 + 2i}{-1 - 2i} + i^{81}.$$

Dále převeďte číslo z do goniometrického tvaru.

Komplexní čísla, úvod

Připomenutí.

- Mějme $z = x + yi$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. x je **reálná část** čísla z , y je **imaginární část** čísla z . Píšeme $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$. Reálná i imaginární část jsou reálná čísla. Geometricky je z bod v rovině o souřadnicích (x, y) .
- **Velikost** komplexního čísla $z = x + yi$ je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Komplexně sdružené** číslo k číslu $z = x + yi$ je číslo $\bar{z} = x - yi$.
- Platí $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.
- **Goniometrický tvar** komplexního čísla $z \neq 0$ je vyjádření

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}$. Píšeme $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Označíme-li pro $\varphi \in \mathbb{R}$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{i\varphi},$$

pak můžeme psát stručněji

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Goniometrický tvar není jednoznačný, označujeme $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R}, z = |z|e^{i\varphi}\}$. Ovšem je-li $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, pak také $\varphi + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. A naopak, každé $\psi \in \operatorname{Arg} z$ lze zapsat jako $\varphi + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Je-li navíc $\varphi \in (-\pi, \pi]$, říkáme, že φ je **hlavní hodnota argumentu** čísla z , a píšeme $\arg z = \varphi$.

- **Moivreova věta** říká, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Stručněji:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

- **Binomické rovnice** jsou rovnice tvaru

$$z^n = w,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jsou dána. Binomická rovnice má právě n různých řešení (v komplexním oboru). Geometricky řešení binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníku.