

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 10

Úloha 1. Určete následující Laplaceův obraz. Funkce $h(t)$ je „dostatečně pěkná“ funkce z L_0 splňující $h(0) = -2$.

$$\mathcal{L}[(h'(t) * (t \sin(it)))(s).$$

Laplaceova transformace

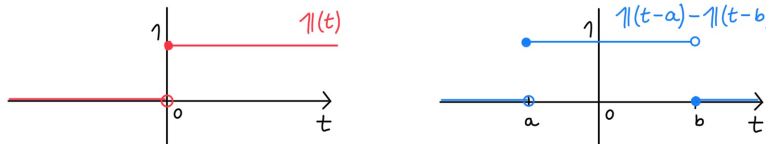
Připomenutí.

- Laplaceova transformace funkce $f(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- Ztotožňujeme funkce $f(t)$ a $f(t)\mathbb{1}(t)$, tj. funkce chápeme jako nulové pro $t < 0$.
- Heavisideova funkce:

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



- Základní aritmetika Laplaceovy transformace:

★ $\mathcal{L}$ je lineární.

★ Pro $a > 0$ jest $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)](\frac{s}{a})$.

★ Pro $a \in \mathbb{C}$ jest $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$.

★ Pro $a > 0$ jest $\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$.

★ Pro $a > 0$ jest $\mathcal{L}[f(t)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$.

[škálování]
[posun obrazu]
[posun vzoru]
[„oříznutí“ vzoru]

- Pár známých obrazů:

★ Pro $n \in \mathbb{N}_0$ jest $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Speciálně $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.

★ Pro $a \in \mathbb{C}$ jest $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.

★ Pro $\omega \in \mathbb{C}$ jest $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ a $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

- Vztah Laplaceovy transformace a derivace pro pěkné funkce:

★ $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s)$

★ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

[derivace obrazu]
[obraz derivace]

Speciálně:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)](s) = s^3\mathcal{L}[f(t)](s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

- Konvoluce a Laplaceův obraz konvoluce: Konvoluce funkcí $f, g \in L_0$ je funkce $(f * g) \in L_0$ definovaná jako

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

a platí $\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s)$.

- Pro inverzní Laplaceovu transformaci racionální funkce $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ nebo $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 \pm e^{-Ts}}$, kde $\text{st } P < \text{st } Q$, $T > 0$, platí

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{s=z_k} F(s)e^{st},$$

kde $z_1, \dots, z_n$ jsou všechny póly funkce $F(s)$.

- Hledáme-li Laplaceův vzor pro funkce ve tvaru $F(s) = G(s)e^{-as}$, kde $a > 0$, postupujeme tak, že nejprve najdeme Laplaceův vzor $g(t)$ pro funkci $G(s)$ a poté (díky pravidlu o posunu vzoru) platí, že $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$.

- Obraz $T > 0$ periodické funkce $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ je

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T))](s)}{1 - e^{-sT}}$$

