Komplexní analýza a transformace 2024/2025

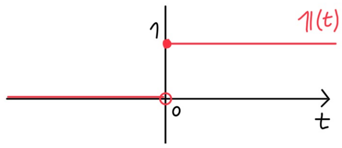
Domácí úkol 11

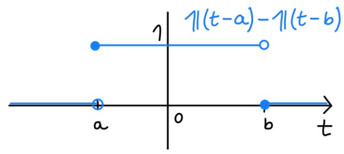
Úloha 1. *Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, víte-li že její Laplaceův obraz je*
(a) $Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)^2}$.

Laplaceova transformace

Připomenutí.

- **Laplaceova transformace** *funkce* $f(t)\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$*:*
$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$
- *Ztotožňujeme funkce* $f(t)$ *a* $f(t)\mathbb{1}(t)$*, tj. funkce chápeme jako nulové pro* $t < 0$*.*
- **Heavisideova funkce***:*
$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0, & \textit{pro } t < 0, \\ 1, & \textit{pro } t \geq 0. \end{cases}$$





- **Základní aritmetika Laplaceovy transformace***:*
  - ⋆ $\mathcal{L}$ *je lineární.*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)](\frac{s}{a})$. *[škálování]*
  - ⋆ *Pro* $a \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$. *[posun obrazu]*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(t-a)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$. *[posun vzoru]*
  - ⋆ *Pro* $a > 0$ *jest* $\mathcal{L}[f(t)\mathbb{1}(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)](s)$. *[„oříznutí“ vzoru]*
- **Pár známých obrazů***:*
  - ⋆ *Pro* $n \in \mathbb{N}_0$ *jest* $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$*. Speciálně* $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$.
  - ⋆ *Pro* $a \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$.
  - ⋆ *Pro* $\omega \in \mathbb{C}$ *jest* $\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ *a* $\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
- **Vztah Laplaceovy transformace a derivace** *pro pěkné funkce:*
  - ⋆ $\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}[f(t)](s)$ *[derivace obrazu]*
  - ⋆ $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ *[obraz derivace]*
  Speciálně:
$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0).$$
$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0).$$
$$\mathcal{L}[f'''(t)](s) = s^3\mathcal{L}[f(t)](s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$
- **Konvoluce a Laplaceův obraz konvoluce:** *Konvoluce funkcí* $f, g \in L_0$ *je funkce* $(f * g) \in L_0$ *definovaná jako*
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ t \geq 0,$$
a platí $\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s)$.
- *Pro* **inverzní Laplaceovu transformaci racionální funkce** $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ *nebo* $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{1\pm e^{-Ts}}$*, kde* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$*,* $T > 0$*, platí*
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=z_k} F(s)e^{st},$$
kde $z_1, \dots, z_n$ *jsou všechny póly funkce* $F(s)$.
- *Hledáme-li* **Laplaceův vzor pro funkce ve tvaru** $F(s) = G(s)e^{-as}$*, kde* $a > 0$*, postupujeme tak, že* **nejprve** *najdeme Laplaceův vzor* $g(t)$ *pro funkci* $G(s)$ *a* **poté** *(díky pravidlu o posunu vzoru) platí, že* $f(t) = g(t-a)\mathbb{1}(t-a)$.
- **Obraz** $T > 0$ **periodické funkce** $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *je*

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{\mathcal{L}[f(t)(\mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(t-T))](s)}{1 - e^{-sT}}$$